



Escola de Camins

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports
UPC BARCELONATECH

Resistencia a punzonamiento en losas de tableros de puentes de hormigón armado en zonas sometidas a momentos negativos

Treball realitzat per:

Magí Domingo Tarancón

Dirigit per:

Antonio Marí Bernat

Eva Oller Ibars

Màster en:

Enginyeria de Camins, Canals i Ports

Barcelona, 26/09/2018

Departament d'Enginyeria Civil i Ambiental

TREBALL FINAL DE MÀSTER

Agradecimientos

En primer lugar, y de manera muy efusiva, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a mi tutor, el *Prof. Anotnio Marí Bernat*, por la gran aportación de conocimiento que ha realizado durante el transcurso de este trabajo, y más importante, con la ilusión que lo transmite. Más allá del conocimiento (que es el mayor beneficio que obtengo de este trabajo final de máster) he de agradecer los consejos y correcciones que ha realizado para que este trabajo pudiera realizarse de manera correcta.

No obstante, el desarrollo de este trabajo no se debe al apoyo de una única persona, sino al del equipo involucrado en este. Por ello, me gustaría también agradecer de manera afectuosa la labor de la co-tutora de este trabajo, la *Prof. Eva Oller Ibars*, quién, ya desde el principio, ha tenido siempre momentos para colaborar y aportar al progreso de este trabajo final de máster.

Me gustaría también mostrar mi agradecimiento al *doctorando Pablo Gonzalo Fernández*, el cual está desarrollando su trabajo doctoral sobre el punzonamiento en losas bajo tracciones en el plano. Agradezco la predisposición con la que se ha mostrado a participar en este trabajo, realizando consejos y aportaciones de interés.

En la misma línea, me gustaría reconocer el trabajo realizado por la *Investigadora Noemí Duarte* sobre el punzonamiento de losas y análisis numéricos previos a este trabajo, que han permitido sentar algunos conocimientos de importancia.

No menos importante, me gustaría dedicar esta tesis a toda la familia más cercana, los cuales han padecido mis sufrimientos y han disfrutado mis alegrías. Su ayuda en la rutina y el día a día ha sido incondicional durante el desarrollo de este trabajo.

Finalmente, considero importante agradecer la colaboración económica del Ministerio de Economía, Industria y Competitividad (Ref: *BIA2015-64672-C4-1-R*) al financiar el proyecto *Evaluación de la capacidad resistente frente a esfuerzos tangentes de estructuras de hormigón mediante modelos mecánicos para la extensión de su vida útil*, en el cual este trabajo queda enmarcado.

A todos ellos, muchas gracias.

Resumen

Las losas de hormigón armado apoyadas en soportes aislados son un elemento estructural ampliamente usado en estructuras de obra civil y edificación por su facilidad constructiva y su eficiencia estructural, dado su trabajo bidireccional. No obstante, ya desde las décadas de los 50-60 del siglo pasado, se detectó que apoyar directamente la losa sobre soportes, sin elementos intermedios como jácenas o capiteles, podría conducir al fenómeno del punzonamiento. El punzonamiento es una rotura en la que una carga puntual sobre una losa de hormigón genera un estado de altas tensiones locales que la losa no puede soportar, dando lugar a una rotura frágil. Dicha rotura tiene un aspecto cónico, en el que la columna “atraviesa” la losa.

En algunas ocasiones las losas pueden estar sometidas, además de a los esfuerzos de flexión, cortante y torsión, a esfuerzos de tracción en su propio plano. Este es el caso de tableros de puentes sometidos a las cargas concentradas de los vehículos en la zona de momentos negativos, o bien forjados de edificación sometidos a cargas horizontales debido, por ejemplo, a empujes de tierras, que son transmitidas mediante un flujo de fuerzas hacia los pilares (efecto diafragma).

Pese a los numerosos estudios realizados sobre punzonamiento, no existe prácticamente ninguna investigación sobre el punzonamiento en losas sometidas a la acción combinada de las cargas verticales y a tracciones contenidas en su plano medio. Por ello, en la Universidad Politécnica de Catalunya, se está iniciando un proyecto teórico y experimental en el que se investiga la influencia de las tracciones en la resistencia a punzonamiento de losas de hormigón armado.

Este Trabajo Final de Máster, enmarcado en el citado proyecto, tiene el propósito de aportar conocimiento sobre el comportamiento de losas de hormigón bajo punzonamiento y tracciones en su plano, con la intención de poder predecir los resultados experimentales y ayudar a diseñar la campaña de ensayos.

Para cumplir con dicho objetivo, en este trabajo se presenta un conjunto de simulaciones numéricas de carácter no-lineal sobre losas de hormigón armado bajo cargas de punzonamiento y tracciones, realizadas mediante ABAQUS, que permiten dar el soporte necesario a la campaña experimental, además de establecer cierta comparación con la formulación normativa y formulación de referencia presentada en el trabajo.

Adicionalmente, dado el hecho de utilizar un modelo numérico basado en elementos finitos, se ha realizado un breve análisis paramétrico, en el que se evalúan factores como el tamaño de mallado, energía de fractura, resistencia a compresión del hormigón y el ángulo de dilatancia (del modelo material). De este trabajo se concluye una alta sensibilidad del modelo a

la modificación del tamaño de la malla, al igual que se observa aún mayor influencia de la resistencia a compresión frente a la energía de fractura.

Los análisis sobre losas sin carga de tracción en su plano han permitido validar el modelo numérico comparándolo con resultados experimentales existentes en la literatura. El estudio de losas sometidas a tracciones en su plano ha aportado resultados coherentes con lo esperado a partir de la mecánica del fenómeno, donde la resistencia a punzonamiento unitaria se reduce a medida que aumentan las tracciones unitarias, en una razón aproximada de 1:5. Este resultado concuerda con el modelo analítico basado en la contribución de la cabeza comprimida (CCCM) modificado para contemplar las tracciones en el plano.

Palabras Clave: Punzonamiento, tracciones, losas, hormigón armado, simulación numérica, comportamiento no lineal

Abstract

Concrete flat slabs are one of the most common structural members currently used in civil infrastructures and building constructions, due to their ease of construction and bidirectional behavior, leading to high structure performance. However, since 50's-60's of the past century, engineers have realized that directly supporting flat slabs on columns, without girders, capitals or drop panels may lead to a structurally critical situation, shear punching collapse. Shear punching is caused by a concentrated load on the flat slab which results in an unsupportable local field tension within the slab, leading into a brittle failure. Such failure, where the column "goes through" the slab, is cone-shaped and has a relatively small size (almost the same size as the slab depth plus the column perimeter).

Depending upon load configurations flat slabs can also be subjected to in-plane axial forces, in addition to flexure, shear and torsion. This scenario is given in bridge decks under concentrated vehicle loads around hogging bending moment zones (nearby the piles) or in building slabs under horizontal loads transmitted, for example under lateral soil pressure, following a flow of stresses into the columns (diaphragm effect). Thus, these situations are not rarely found in daily design.

Despite shear punching has been deeply studied since 1960, there is no existing investigation about flat slab strength against combined punching and in-plane axial actions. For this reason, the Technical University of Catalonia (UPC) is carrying out a new theoretical-experimental project to assess the combined action of punching and axial mid-plane loads influence into reinforced-concrete flat slab strength.

The aim of the present Master Thesis, within the frame of the before-mentioned project, is to provide some prior knowledge about the behavior of flat slabs under combined punching and in-plane axial loads, seeking to support the set-up of the experimental campaign, provisioning it with strength predictions and a tool to fully understand the experimental results.

To fulfil this purpose, several non-linear simulations completed with ABAQUS are presented, supporting the future experimental campaign and, at the same time, providing additional results to compare them with the current code formulation and project-reference formulation presented within the text.

As a Finite Element numerical model is used, a short parametric analysis is conducted. The accounted variables for the analysis are the mesh size, concrete fracture energy and compressive strength values and the dilation angle (included in the plastic concrete model). The results obtained from the analysis concludes into a high parameter dependency of the mesh size, as well as a higher influence of the compressive strength compared to the energy fracture on the punching strength.

The numerical analysis carried on flat slabs without in-plane axial loads have allowed to validate the proposed model by means of comparing the obtained results with past experimental results from literature. The analysis of combined in-plane axial and punching loads have led to coherent results according to the mechanical phenomena. It has been found that the unit shear punching strength is reduced as the unit axial tensile force increases, at an approximate ratio of 1:5. This result agrees with the analytical model based on the compression chord capacity model (CCCM), adapted to account for the tensile forces.

Keywords: Shear punching, traction, flat slabs, reinforced concrete, numerical simulations, non-linear behavior

Índice general

1. Introducción y objetivos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Motivación y Objetivos	3
1.3. Estructura del trabajo	4
2. Revisión del estado del conocimiento	7
2.1. Mecánica del punzonamiento	9
2.1.1. Modelo clásico de punzonamiento - <i>Kinnunen y Nylander (1960)</i>	12
2.1.2. Modelos mecánicos recientes	14
2.1.3. Modelo de referencia - Compression Chord Capacity Model de <i>Marí et al.</i>	26
2.2. Normativa y punzonamiento	34
2.2.1. EN1992-1-1. Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings	35
2.2.2. ACI Standard - Building Code Requirements for Structural Concrete - ACI 318M-14	37
2.3. Resumen	38
3. Simulación numérica del punzonamiento en losas	41
3.1. Introducción a los elementos finitos	42
3.2. Definición de la simulación	45
3.2.1. Definición inicial de la losa	45
3.2.2. Definición de las propiedades materiales	46
3.2.3. Configuración de la simulación	58
3.3. Resultados	63
3.3.1. Resultados iniciales	63
3.3.2. Comparación frente al modelo de referencia	71
3.3.3. Análisis paramétrico del modelo numérico	72
3.4. Resumen	82
4. Efecto de las tracciones en la resistencia a punzonamiento	85
4.1. Introducción y efecto de las tracciones en el plano	86

4.1.1. Formulación analítica del fenómeno	86
4.2. Definiciones geométricas y numéricas adicionales	89
4.3. Resultados	92
4.3.1. Resultados numéricos	92
4.3.2. Comparación entre resultados analíticos y numéricos .	102
4.4. Resumen	104
5. Conclusiones	107
Appendices	117
Apéndice A. Planos de la geometría y el armado de la losa	117
Apéndice B. Cálculos	131
B.1. Cálculo de tracciones admisibles	131
B.2. Verificación a Punzonamiento	132
B.2.1. Cálculos previos	132
B.2.2. EN1992-1-1	132
B.2.3. Modelo de <i>Marí et al. (2018)</i>	133
B.3. Verificación de la armadura a flexión	134
B.3.1. Momento de diseño	135
B.3.2. Verificación sobre la dirección no traccionada	136
B.3.3. Verificación sobre la dirección traccionada	136
B.4. Verificación a Punzonamiento con Tracciones	139
B.4.1. EN1991-1-1	139
B.4.2. Modelo de <i>Marí et al. (2018)</i> modificado	140
Apéndice C. Parámetros materiales introducidos en ABAQUS	141
Apéndice D. Resultados gráficos	143
D.1. Simulación del punzonamiento sin tracciones	143
D.2. Simulación del punzonamiento con tracciones	146

Índice de figuras

1.1. Ejemplos de la susceptibilidad de puentes al punzonamiento y a configuraciones de punzonamiento combinado con tracciones en el plano. (a) Rotura por punzonamiento en un tablero de puente [1]. (b) Caso de un tablero de puente situado en zona de momentos negativos (con tracciones en el plano) y bajo posible carga puntual [2].	2
2.1. Obra de edificación usando losas de hormigón planas [3] . . .	7
2.2. Rotura del edificio residencial <i>Skyline Plaza</i> [7] cortesía de NIST - National Institute of Standards and Technology . . .	9
2.3. Evolución de la fisuración en función del estado de carga [10]	10
2.4. Resultados de ensayos a punzonamiento de <i>Kinnunen y Nylander (1960)</i> 2.4a y <i>Guandalini y Muttoni (2004)</i> [12]	11
2.5. Modelo mecánico propuesto por <i>Kinnunen y Nylander (1960)</i> [3]	13
2.6. Criterio de rotura V_ε [13].	15
2.7. Criterio de rotura V_σ [3].	16
2.8. Esquema mecánico propuesto por <i>Menétrey</i> , considerando las tracciones en el hormigón como punto clave del modelo [21]. .	18
2.9. Resultados de la comparativa modelo-ensayos experimentales sin armadura de punzonamiento (a) y con armadura de punzonamiento (b) [21].	19
2.10. Curvas Carga-Desplazamiento para distintas secciones de armadura [21]	20
2.11. Distinta geometría de los conos de punzonamiento, con $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$ y 60° respectivamente [21].	21
2.12. Curvas Carga-Desplazamiento en función del ángulo de fisuración en el cono de punzonamiento [3].	21
2.13. Modelo analítico propuesto por <i>Muttoni</i> [14].	23
2.14. Predicción de la rotura a punzonamiento propuesta por <i>Muttoni</i>	25
2.15. Procedimiento de diseño para la verificación a punzonamiento [14].	26

2.16. Representación de los distintos parámetros utilizados, incluyendo el perímetro crítico y el perímetro de fisuración [11]. . .	29
2.17. Corte esquemático de las tensiones verticales en la conexión losa-columna (a) y detalle del estado tensional en la misma zona (b) [11].	30
2.18. Estado de tensiones principales (a) y envolvente de Kupfer bi-axial modificada (b) [11].	31
2.19. Equilibrio de fuerzas en una cuña de hormigón por debajo de la fisura [11].	32
2.20. Definición del perímetro crítico (C).	36
3.1. Disposición de la losa, con las distintas armaduras y apoyos (dibujados como superficies rígidas). La numeración corresponde a la lista anterior con 4 tipologías de armado	47
3.2. Relación constitutiva esperada por el programa ABAQUS para la compresión uniaxial del hormigón [29].	50
3.3. Comparativa de relaciones constitutivas (a partir de la parábola de Hognestad. La curva <i>negra</i> es relación sin modificar, las curvas azul y roja, han sido desplazadas a causa de la mala predicción en las deformaciones elásticas, a causa de la desviación del módulo elástico	51
3.4. Relaciones compresión uniaxial-deformación (3.4a) y curva introducida en ABAQUS para la rama post-elástica, considerando deformaciones únicamente inelásticas (3.4b)	53
3.5. Relación tensión-deformación y tensión-abertura de fisura del modelo propuesto por <i>Model Code 2010</i> [6]	54
3.6. Relaciones tracción uniaxial-deformación (3.6a) y curva introducida en ABAQUS para la rama post-elástica, considerando deformaciones únicamente inelásticas (3.6b)	57
3.7. Relación bilineal tensión-deformación uniaxial para el acero .	58
3.8. Representación gráfica de la porción de losa a simular, incorporando los ejes de referencia	60
3.9. Modelo de elementos finitos definido en ABAQUS.	62
3.10. Curva Carga-Desplazamiento para la simulación de la losa propuesta	64
3.11. Tensiones principales máximas (de tracción) en el paramento traccionado de la losa, justo en el punto de carga máxima . .	65
3.12. Tensiones principales máximas (tracciones) en el paramento inferior. En un estado de carga intermedio donde aparece la primera fisuración durante la segunda rama lineal (izquierda). Estado de carga justo posterior a la carga máxima (derecha)	65
3.13. Representación de la superficie de rotura y el <i>tronco-cono</i> de hormigón resultante. Tensiones principales máximas (izquierda) y deformaciones plásticas principales máximas (derecha) .	66

3.14. Comparación de las curvas Carga-Desplazamiento de los resultados numéricos propuestos frente a los resultados experimentales obtenidos por <i>Adetifa y Polak</i> en [30] y numéricos obtenidos por <i>Genikomsou y Polak</i> en [33] (<i>Referencia de ensayo SB1</i>).	67
3.15. Representación de apoyos alternativos (a) y diferencia entre curvas Carga-Desplazamiento debido a la modificación de los apoyos	68
3.16. Tensión de Von Mises para las armaduras de acero, habiendo plastificado parte de ella en el momento de la carga máxima .	69
3.17. Tensión principal máxima en el paramento superior e inferior tras la imposición de un desplazamiento de 20mm mediante la placa de carga.	70
3.18. Curva Carga-Desplazamiento de la simulación bajo un control de desplazamiento máximo de -35mm, frente al resultado propuesto (desplazamiento vertical máximo de -20mm)	70
3.19. Curvas Carga-Desplazamiento para distintos tamaños de malla	74
3.20. Comparación de la carga máxima en función del número de elementos (relativo al numero de elementos correspondiente a $m=20\text{mm}$)	75
3.21. Comparación de las tensiones principales máximas (de tracción) de los casos con tamaño de malla $m=10\text{mm}$ (izquierda) y $m=20\text{mm}$ (derecha).	76
3.22. Curvas Carga-Desplazamiento para distintas Energías de Fractura	77
3.23. Relación Energía de Fractura Unitaria - Carga Unitaria en (a) y Energía de Fractura Unitaria - Desplazamiento Unitario en (b)	78
3.24. Curvas Carga-Desplazamiento en función de la resistencia a compresión f_{cm}	79
3.25. Respuesta del punzonamiento (unitario) frente al incremento (unitario) de la resistencia a compresión del hormigón, juntamente con un ajuste cuadrático y un ajuste lineal.	80
3.26. Curvas Carga-Desplazamiento en función del ángulo de dilatación.	81
4.1. Equilibrio de fuerzas en una cuña de hormigón limitada por fisuras radiales y tangenciales	88
4.2. Losa introducida en la Sección 3.2.1 incorporando los elementos que transmiten la tracción	90
4.3. Representación con dimensiones del aparato destinado a transferir las tracciones impuestas en el plano al hormigón	90
4.4. Modelo numérico incorporando las tracciones en el plano. . .	91

4.5.	Curvas Carga-Desplazamiento para la losa de referencia bajo distintos niveles de tracción contenida en el plano	93
4.6.	Relaciones Carga máxima (unitaria)-Tracción aplicada (unitaria) (a) y Desplazamiento en cara máxima (unitario)-Tracción aplicada (unitaria) (b)	95
4.7.	Patrón de fisuración a partir de las deformaciones plásticas máximas (tracciones) bajo unas tracciones en el plano de 50 % T_{lim} , 100 % T_{lim} y 150 % T_{lim} (de izquierda a derecha respectivamente).	96
4.8.	Deformaciones plásticas máximas (tracciones) en el momento en el que se inicia la fisuración del hormigón para las tracciones de 0 % T_{lim} , 50 % T_{lim} , 100 % T_{lim} y 150 % T_{lim} (de izquierda a derecha y arriba a bajo respectivamente)	97
4.11.	Representación de deformaciones plásticas tras la cara post-pico para tracciones aplicadas de 0 % T_{lim} , 50 % T_{lim} , 100 % T_{lim} y 150 % T_{lim} (de izquierda a derecha y de arriba a bajo). Estas muestran el patrón de fisuración post-rotura.	98
4.9.	Tensiones principales máximas para los casos de carga con tracciones equivalentes al (a) 50 %, (b) 100 % y (c) 150 % de la tracciones límite.	100
4.10.	Tensión de Von Mises en las armaduras en el instante de carga máxima para las tracciones en el plano de 0 % T_{lim} , 50 % T_{lim} , 100 % T_{lim} y 150 % T_{lim} (de izquierda a derecha y de arriba a bajo).	101
4.12.	Relación Carga Unitaria - Tracciones exteriores Unitarias para los resultados numérico y analíticos.	103
B.1.	Distribución de momentos sobre la sección transversal del centro de la losa, bajo una carga de $P=1kN$	135
D.2.	Tensiones correspondientes a ($P = 84,4 kN, \delta = 0,44 mm$) (0 % T_{lim}), ($P = 79,9 kN, \delta = 0,44 mm$) (50 % T_{lim}), ($P = 37,35 kN, \delta = 0,44 mm$) (100 % T_{lim}) y ($P = 40 kN, \delta = 0,44 mm$) (150 % T_{lim})	147
D.3.	Tensiones correspondientes a ($P = 136,5 kN, \delta = 1,08 mm$) (0 % T_{lim}), ($P = 105,62 kN, \delta = 1,08 mm$) (50 % T_{lim}), ($P = 69,95 kN, \delta = 1,08 mm$) (100 % T_{lim}) y ($P = 72,73 kN, \delta = 1,08 mm$) (150 % T_{lim})	148
D.4.	Tensiones correspondientes a ($P = 225 kN, \delta = 4,7 mm$) (0 % T_{lim}), ($P = 195 kN, \delta = 4,7 mm$) (50 % T_{lim}), ($P = 175,6 kN, \delta = 4,7 mm$) (100 % T_{lim}) y ($P = 157,9 kN, \delta = 4,7 mm$) (150 % T_{lim})	149
D.5.	Tensiones correspondientes a ($P = 265,17 kN, \delta = 7,95 mm$) (0 % T_{lim}), ($P = 238,2 kN, \delta = 7,95 mm$) (50 % T_{lim}), ($P = 219,68 kN, \delta = 7,95 mm$) (100 % T_{lim}) y ($P = 157,3 kN, \delta = 7,95 mm$) (150 % T_{lim})	150

D.6. Tensiones correspondientes a ($P = 185,25 \text{ kN}$, $\delta = 10 \text{ mm}$) ($0 \%T_{lim}$), ($P = 223,6 \text{ kN}$, $\delta = 10 \text{ mm}$) ($50 \%T_{lim}$), ($P =$ $224,35 \text{ kN}$, $\delta = 10 \text{ mm}$) ($100 \%T_{lim}$) y ($P = 142,75 \text{ kN}$, $\delta =$ 10 mm) ($150 \%T_{lim}$)	151
D.7. Tensiones correspondientes a ($P = 139,5 \text{ kN}$, $\delta = 20 \text{ mm}$) ($0 \%T_{lim}$), ($P = 140,33 \text{ kN}$, $\delta = 20 \text{ mm}$) ($50 \%T_{lim}$), ($P =$ $138,63 \text{ kN}$, $\delta = 20 \text{ mm}$) ($100 \%T_{lim}$) y ($P = 126,5 \text{ kN}$, $\delta =$ 20 mm) ($150 \%T_{lim}$)	152

Índice de cuadros

3.1. Binomio Carga-desplazamiento máximos	64
3.2. Resultados experimentales de <i>Adetifa y Polak</i> ([30]) en comparación con los resultados obtenidos en las simulaciones. . .	67
3.3. Comparación de cálculos <i>manuales</i> de punzonamiento frente la simulación presentada y los resultados de <i>Adetifa y Polak</i> en [30].	72
3.4. Datos del análisis de la sensibilidad del mallado	73
3.5. Resultados de carga máxima-desplazamiento para los distintos valores de G_f estudiados	77
3.6. Resultados de carga máxima-desplazamiento para los distintos valores de f_{cm} estudiados	78
3.7. Resultados de carga máxima para los distintos valores de ψ estudiados	82
4.1. Resultados Carga máxima-flecha para cada uno de los estados de tracción simulados	93
4.2. Cargas de fisuración asociadas a las respectivas tracciones aplicadas en el plano.	98
4.3. Resultados de carga máxima de las ds formulaciones analíticas utilizadas, conjuntamente con el error que tienen frente al resultado simulado.	102
C.1. Resumen de parámetros materiales a introducir en el paquete de cálculo ABAQUS	142

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1. Introducción

Las losas de hormigón armado son un elemento estructural ampliamente usado en ingeniería civil, desde edificación hasta puentes, por su adecuación para cubrir superficies o salvar luces en dos direcciones. Según el sistema estructural y las condiciones de contorno dichas losas trabajan de forma unidireccional o bidireccional. Adicionalmente, estos elementos pueden ser simplemente armados (con armadura pasiva) o armados y pretensados (con armadura pasiva y armadura postesa) y, dependiendo de las condiciones de apoyo y de contorno que presenten, tienen un comportamiento u otro.

Una de las condiciones de contorno más comunes que se da en losas de hormigón es la de la propia losa dispuesta sobre la columna (apoyo), sin ningún elemento estructural entre ellos (jácenas, capiteles y/o ábacos). En edificación, dicha solución es ampliamente usada, permite una construcción fácil y rápida (en comparación con otros sistemas) dado, principalmente, por la facilidad de encofrado. De esta manera, se obtiene una losa la cual reposa únicamente sobre columnas, generando una losa continua con cargas concentradas (reacciones de las columnas). En puentes, más allá de aspectos constructivos o tipología seccional, también se pueden dar situaciones en las que las condiciones de contorno se asemejan a los casos en edificación, por ejemplo, el caso de cargas concentradas (durante servicio) sobre el tablero de un puente debido a vehículos pesados o la aparición de cargas concentradas debidas a las reacciones del carro de avance en puentes cajón ejecutados, por voladizos sucesivo (durante construcción).

Independientemente de las situaciones mencionadas (u otras), todos los casos en los que existe una losa de hormigón bajo cargas concentradas presenta un inconveniente, y es la aparición de un estado de esfuerzos internos y tensiones que puede conducir a la rotura por punzonamiento. Dicha rotura se considera francamente peligrosa, al ser frágil y por ello no predecible.

Como cualquier rotura frágil, tanto el proyectista como el constructor han de prestarle una atención adicional para poder asegurar que, bajo cualquier configuración de sobrecarga, se puede asegurar la rotura de otros elementos antes que se produzca el punzonamiento.

Más allá del punzonamiento “puro”, existen también situaciones en las que, partiendo de una configuración de cargas concentradas sobre la losa de hormigón, aparecen también tracciones contenidas en el plano de la propia losa en una configuración propensa a padecer punzonamiento. Sin profundizar todavía en el fenómeno de las tracciones, dadas estas, la profundidad relativa del eje neutro en el hormigón (x/d) se reduce, disminuyendo la capacidad resistente de la losa, siendo pues un caso que merece un estudio dedicado.



Figura 1.1: Ejemplos de la susceptibilidad de puentes al punzonamiento y a configuraciones de punzonamiento combinado con tracciones en el plano. (a) Rotura por punzonamiento en un tablero de puente [1]. (b) Caso de un tablero de puente situado en zona de momentos negativos (con tracciones en el plano) y bajo posible carga puntual [2].

Desde un punto de vista académico y normativo, hace más de medio siglo que se ha estudiado en profundidad el fenómeno del punzonamiento bajo distintas configuraciones (cargas centradas, excéntricas, etc.) y desde distintos puntos de vista, conduciendo a diferentes expresiones analíticas o empíricas dependiendo del autor. Aun así, de la literatura se puede observar que el fenómeno combinado de tracciones y punzonamiento no se ha estudiado todavía con detenimiento, abriendo la puerta a nuevas investigaciones sobre el tema. Cabe destacar que una situación en la que se combinen conjuntamente ambos fenómenos no parece descabellada, sin ir más lejos, podrían aparecer cargas concentradas (durante servicio o construcción) en zonas de apoyo (momento negativo) en puentes de sección en cajón o losa,

tal y como muestra la Figura 1.1.

Dada una configuración presentada, de una losa bajo una carga concentrada susceptible a punzonamiento o aún con más razón una losa susceptible a punzonamiento combinado con tracciones en el plano, ya sea debido a un incremento de cargas nominales o un diseño obsoleto, actualmente existen soluciones para reforzar la losa y así incrementar la resistencia a punzonamiento.

Estas soluciones pueden comprenderse en actuaciones tomadas durante diseño, las cuales introducen sistemas específicos para combatir el punzonamiento, como armados especiales o la inclusión de un ábaco, o actuaciones hechas posteriores a la construcción como la instalación de armadura transversal mediante perforaciones y anclajes.

Cabe decir que estas últimas actuaciones mencionadas son muy agresivas con la estructura y a veces no se pueden llevar a la práctica. Sin embargo, existen otras soluciones que se están llevando a cabo, como la instalación de refuerzos a partir de bandas de *polímero reforzado con fibras (FRP - Fiber Reinforced Polymers)*, las cuales permiten incrementar la resistencia sin atacar la estructura y con una fácil instalación.

1.2. Motivación y Objetivos

Presentada la problemática que entraña disponer de losas de hormigón propensas al punzonamiento, conjuntamente con tracciones en el propio plano de la losa, parece interesante intentar comprender, principalmente mediante técnicas de elementos finitos, qué respuesta bajo cargas, a efectos de tensión-deformación y carga-desplazamiento, muestra la misma.

Teniendo en consideración que la investigación de punzonamiento combinado con tracciones contenidas en el plano de la losa todavía tiene mucho recorrido, la motivación principal de este trabajo final de máster es dar soporte a los ensayos en laboratorio planteados en el marco de dicha línea de investigación, conducidos por el profesor Antonio Marí Bernat, profesora Eva Oller Ibars y el doctorando Pablo Gonzalo Fernández, todos del Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la ETS de Ingeniería de Caminos de Barcelona (ETSICCPB) de la Universidad Politécnica de Catalunya (UPC).

Así pues, partiendo de la motivación presentada, el objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento a punzonamiento de losas de hormigón armado sometidas a tracciones en el plano mediante el uso de un modelo numérico. Ello permitirá dar el soporte mencionado a la campaña experimental conducida en paralelo. A su vez, los resultados obtenidos permitirán la comparación de los resultados obtenidos con un modelo conceptual para el

diseño de losas desarrollado por *Marí et al. (2018)* y expuesto en la Sección 2.1.3.

Para ello se empleará el paquete de cálculo ABAQUS, conjuntamente con otras herramientas como PYTHON o EXCEL, para el desarrollo de un modelo 3D capaz de capturar el comportamiento no-lineal del fenómeno.

De manera más detallada,

- Modelado con propiedades no-lineales de una losa de hormigón armado mediante el programario destinado a elementos finitos ABAQUS, capaz de simular el punzonamiento combinado con la incorporación de tracciones en el plano medio de la losa.
- Análisis de las propiedades del modelo (p.e tamaño de malla, energía de fractura,...).
- Simulación de losas con distinto nivel de tracción y análisis del comportamiento (curvas desplazamiento-T, campos de tensiones, ...) en función de la tracción.
- Soporte numérico para el desarrollo de un programa de ensayos sobre losas de hormigón bajo esfuerzos de punzonamiento y tracciones contenidas en el propio plano
- Comparación del modelo analítico desarrollado por *Marí et al.* incorporando los fenómenos de tracciones impuestas y las distintas herramientas de mejora del hormigón frente a los resultados numéricos.
- Se presenta el campo para futuros estudios de punzonamiento bajo tracciones contenidas en el plano en modelos mayores, en referencia a geometrías reales en las zonas de momentos negativos en tableros de puentes.

Finalmente, cabe resaltar que el conjunto de simulaciones y cálculos mostrados en el presente trabajo se enmarcan en el proyecto de investigación titulado: *Evaluación de la capacidad resistente frente a esfuerzos tangenciales de estructuras de hormigón mediante modelos mecánicos para la extensión de su vida útil*, financiado por el Ministerio de Economía, Industria y Competitividad con referencia *BIA2015-64672-C4-1-R*. El cual responde a la intención de investigar el comportamiento de las losas simuladas en este trabajo, al igual que otros elementos estructurales los cuales permiten reproducir el comportamiento de losas de puentes de manera teórico-experimental.

1.3. Estructura del trabajo

El presente trabajo presenta una estructura acorde con la resolución de los objetivos presentados.

En el Capítulo 2 se presenta una revisión del estado del arte sobre punzonamiento en losas de hormigón, revisando los distintos modelos analíticos y empíricos más relevantes así como la normativa vigente en relación con el fenómeno.

En el Capítulo 3 se expone el modelado de la losa a simular, propuesta inicialmente para un conjunto de ensayos de laboratorio, especificando los modelos constitutivos de los materiales, condiciones de contorno, mallado y demás propiedades que definen el modelo. También se presenta una comparación, a modo de validación de los resultados numéricos, entre el modelo analítico de referencia y los resultados numéricos y un análisis de sensibilidad de los distintos parámetros que definen el modelo numérico.

En el cuarto capítulo se presenta y analiza la introducción de esfuerzos de tracción en el plano de la losa. Permitiendo así adquirir conocimiento sobre el fenómeno combinado de punzonamiento y tracciones, necesario para dar soporte a la campaña experimental y, al mismo tiempo, comparar los resultados obtenidos mediante elementos finitos con el modelo analítico de referencia.

Finalmente, en el quinto y último capítulo se presentan unas conclusiones sobre el trabajo y el análisis realizado para las distintas configuraciones expuestas.

Capítulo 2

Revisión del estado del conocimiento

Las losas planas de hormigón, tal y como se ha mencionado con anterioridad, son un elemento estructural ampliamente usado en el mundo de la ingeniería civil y la construcción. Estas, permiten salvar luces en dos direcciones igual de predominantes sin elementos intermedios y con relativa facilidad. Dichas losas planas (sin elementos entre losa y columna, como vigas, capiteles o ábacos) de hormigón armado son comúnmente usadas en el presente dada su facilidad constructiva (economía y rapidez) y estética arquitectónica a la vez que, estructuralmente, presentan una ventaja al tener un comportamiento bidireccional, el cual permite una redundancia interna que permite la reducción del canto del elemento. Para el caso de la edificación se muestra como ejemplo la Figura 2.1.

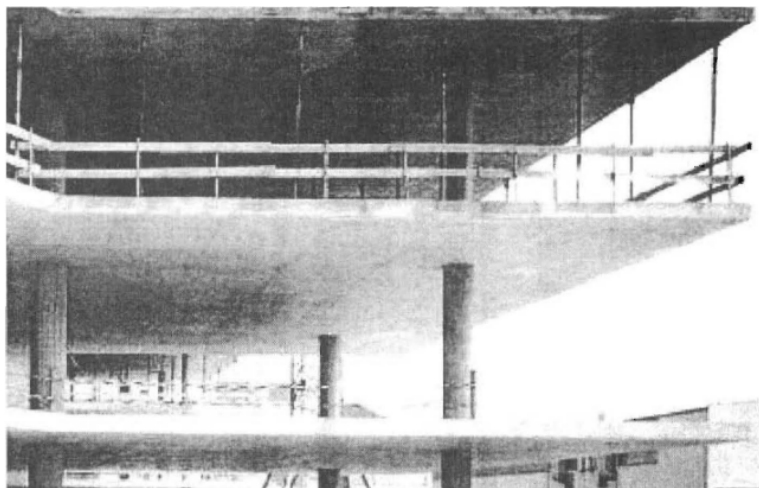


Figura 2.1: Obra de edificación usando losas de hormigón planas [3]

A pesar de los beneficios constructivos y estructural, las losas planas entrañan una transmisión de cargas mucho más compleja que otros elementos estructurales a flexión y esfuerzo cortante. Cabe destacar que, desde un punto de vista puramente estructural, no parece la mejor solución apoyar un plano sobre apoyos puntuales, dado que se generan regiones de discontinuidad geométrica muy importantes (Regiones-D), dónde los efectos locales alteran profundamente el comportamiento global, conduciendo así al problema ya introducido en un inicio, la rotura por punzonamiento [3].

Dada la complejidad en la transmisión de cargas, ya desde la década de los 60 se inició una fuerte investigación sobre el fenómeno del punzonamiento en losas de hormigón esbeltas y cimientos (que padecen de una fenomenología similar), con el objetivo de conocer el proceso completo de rotura y así poder proveer adecuadamente de formulación a las normativas relacionadas con el diseño de estructuras. Dichas investigaciones, resumiéndolas en las más relevantes, se presentarán en los siguientes apartados.

Desde un punto de vista histórico, las roturas por punzonamiento no se han presentado con frecuencia pero, si sucedían, han sido catastróficas dada la fragilidad de la rotura (roturas sin previo aviso), mostrando así porqué es fundamental prestar atención al fenómeno del punzonamiento.

Tal y como apuntan *Fernández Ruiz et al.* en [4], la fragilidad de la rotura a punzonamiento se puede combatir mediante la provisión de detalles constructivos capaces de absorber una fractura inicialmente frágil. Pese a los esfuerzos normativos para proveer de suficiente ductilidad a la rotura (como las últimas versiones de la *EN1992* [5] o el *Model Code 2010* [6]), todavía existen roturas por punzonamiento, principalmente debidas a deficiencias en el diseño, poca adecuación normativa debido a la formulación empírica, errores durante ejecución y modificación de las acciones iniciales.

Dos de los ejemplos que se pueden encontrar en la literatura (entre muchos otros) son el colapso del *Skyline Plaza, Bailey's Crossroads* [7] y el colapso de un centro comercial en *Sampoong, Seul* [8], siendo el primero un colapso progresivo debido a un descimbrado temprano (error durante ejecución) y el segundo una probable modificación de cargas, aunque el caso es más relevante por el hecho que deja entrever cierta debilidad (pobre aplicabilidad de la normativa) y discrepancia entre códigos estructurales.

Así pues, la estructura de este capítulo se centra en entender la mecánica que explica la rotura por punzonamiento mediante los principales modelos analíticos que se han presentado a lo largo del tiempo. Conjuntamente, se exponen dos normativas, *EN1992-1-1:2004 (UE)* y *ACI-318M 2014 (USA)*.



Figura 2.2: Rotura del edificio residencial *Skyline Plaza* [7] cortesía de NIST - National Institute of Standards and Technology

2.1. Mecánica del punzonamiento

Tal y como ya se ha introducido anteriormente, el fenómeno del punzonamiento se da, principalmente, en losas de hormigón planas soportadas únicamente por columnas (apoyos puntuales).

De manera general (sin entrar en ninguna simplificación o presunción propias de modelos analíticos) la rotura de la losa a punzonamiento es inicialmente desencadenada por la fisuración del paramento traccionado (debido a momentos impuestos) y por ello fisuración propia de flexión (Figura 2.3a), apareciendo de manera tangencial alrededor de la columna (de manera “circular”). Poco después, también empiezan a desarrollarse fisuras radiales, dada la combinación de momentos biaxiales (radiales-tangenciales) que aparecen en losas (Figura 2.3b).

A continuación, las fisuras tangenciales toman más relevancia y, una de las fisuras a flexión se desarrolla de manera diagonal (diagonal en un corte transversal) desde un punto a una distancia r del paramento traccionado hasta situarse justo antes de la zona de compresión del hormigón (colindante a la raíz de la columna o punto de aplicación de la carga puntual) debido a la combinación de esfuerzos flectores y cortantes (Figura 2.3c y d). Cabe destacar que, según *Alexander y Simmonds* [9], dichas fisuras se desarrollan al 50-70 % de la carga última y la conexión losa-columna es estable dado que se puede cargar y descargar sin alterar la carga última. Esto podría llevar a pensar que en este estado de fisuración todavía no se ha desarrollado el punzonamiento.

Al aumentar todavía más la carga, el único elemento del hormigón resis-

tente es la porción de la losa a compresión colindante a la columna, que se ve sometido a un estado bastante complejo de tensiones, aspecto que conduce a la falta de un consenso total sobre el fenómeno de rotura (como ya se verá posteriormente). Parece claro que dicha zona se ve doblemente comprimida, dadas las compresiones debidas al momento flector tangencial y las compresiones debidas al momento flector radial, las cuales generan cierto confinamiento al hormigón en el momento de la rotura, incrementando así su resistencia. A su vez, la misma zona se ve sometida a esfuerzos cortantes. El punzonamiento se producirá en el momento en que dicha región colapse (Figura 2.3e). Es importante resaltar que el modo de rotura dependerá (tal y como se muestra posteriormente) en gran medida de la cantidad geométrica de armadura a tensión que existe, conduciendo a una rotura por flexión, rotura por flexión-punzonamiento o por punzonamiento.

La rotura por punzonamiento se caracteriza por la penetración de una forma cónica donde la carga era aplicada, siguiendo las fracturas diagonales producidas durante el proceso.

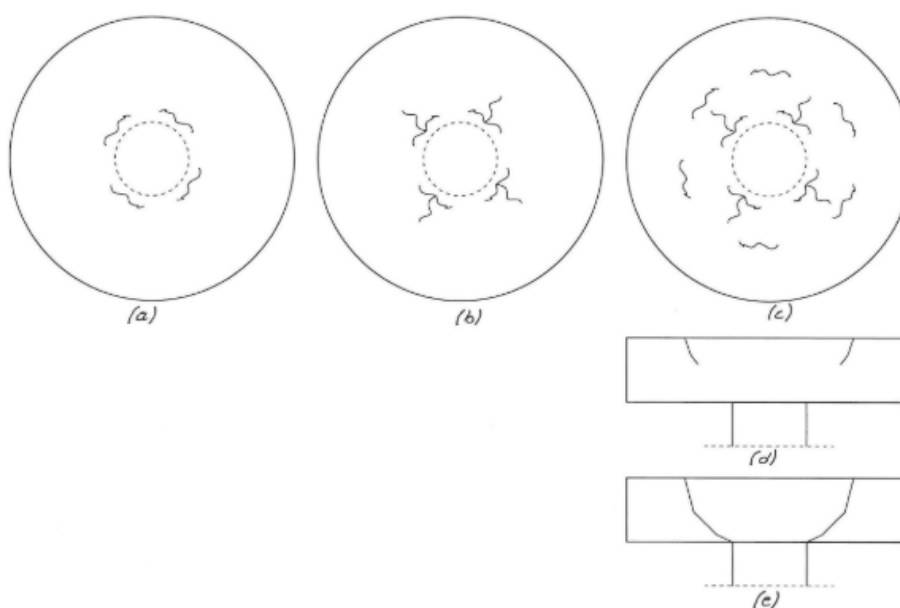
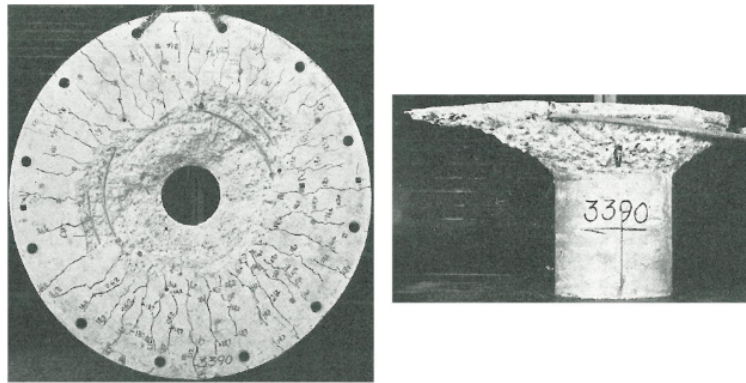


Figura 2.3: Evolución de la fisuración en función del estado de carga [10]

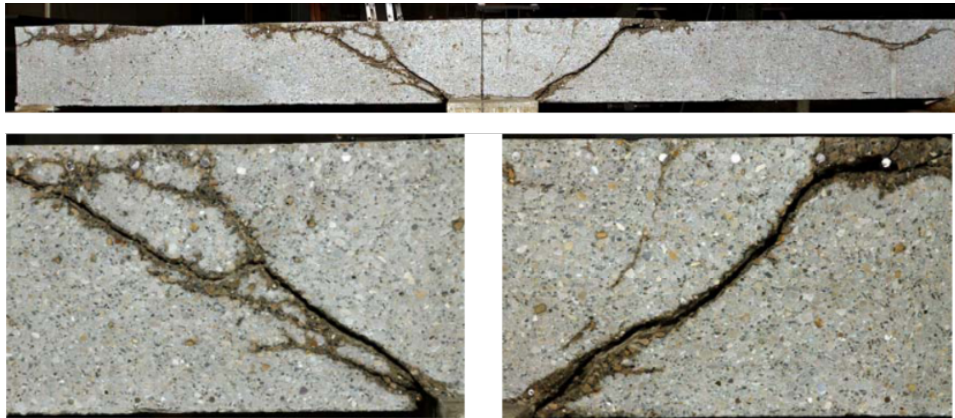
Diferentes autores entienden el colapso de esta zona de manera distinta, como el fallo a compresión de un trapecoide revolucionado alrededor de la columna (*Kinnunen y Nylander (1960)*), compresión de un biela de hormigón en un sistema de bielas y tirantes o en una rotura de compresión/tracción sobre la cáscara troncocónica bajo esfuerzos biaxiales de compresión (cortante sobre el cordón comprimido de hormigón), semejante a la rotura por

cortante que sucede en vigas (*Marí et al. (2018) [11]*).

Independientemente de cómo el autor dibuje o entienda la rotura, la mayoría de las propuestas pueden ser equivalentes, dado que la rotura a compresión de un cono oblicuo depende, en parte, de la resistencia a tracción del hormigón. Y a su vez, la compresión “pura” que padece un cono oblicuo es equivalente a un estado biaxial de compresiones y esfuerzo cortante.



(a)



(b)

Figura 2.4: Resultados de ensayos a punzonamiento de *Kinnunen y Nylander (1960) 2.4a* y *Guandalini y Muttoni (2004)[12]*
2.4b

Dada la complejidad del modo de rotura, su fragilidad y la repercusión que, por ello, puede obtener, ya desde la década de 1960 se iniciaron nuevas investigaciones con el objetivo de entender el fenómeno y definir a su vez ecuaciones de diseño para los distintos códigos normativos.

Dichas investigaciones se iniciaron con *Elstner y Hognestad (1956)*, en Estados Unidos, al ver que se empezaban a utilizar losas planas de hormigón sin suficiente conocimiento sobre el fenómeno del punzonamiento y la resistencia de estas losas. Posteriormente *Kinnunen y Nylander (1960)* publicaron el primer modelo mecánico de punzonamiento y *Moe (1961)* un documento de ensayos que recogía observaciones, resultados y cuya formulación empírica fueron la base sobre el que se desarrolló la normativa estadounidense ACI-318-1963 [3]. Estos tres documentos sentaron las bases del punzonamiento a nivel mundial, a partir de los cuales se ha desarrollado todo el conocimiento [13].

Cabe destacar que, pese a todos los modelos analíticos desarrollados hasta la fecha, la mayoría de formulaciones normativas se basan en ensayos de losas las cuales pueden estar fuera de un ámbito realístico de aplicabilidad, ensayando losas de 0.1-0.2m cuando algunas losas (como cimientos) superan los 0.4m [14]. Por ello, es importante que los modelos analíticos adquieran cada vez más presencia en la normativa, dado que estos pueden reproducir de manera consistente gran variedad de situaciones, las cuales el efecto tamaño o la cantidad de armadura longitudinal (entre otros) son considerados.

2.1.1. Modelo clásico de punzonamiento - *Kinnunen y Nylander (1960)*

En 1960 los autores *Kinnunen y Nylander* presentaron el primer modelo mecánico (analítico) sobre punzonamiento. Dicho modelo se desarrolló en base a 61 ensayos sobre losas circulares conectadas a columnas concéntricas también circulares, dónde se analizó con detenimiento la formación de fisuras fruto del cortante, la deformación de los *sectores* y la expansión del hormigón y acero [3].

Uno de los fenómenos que detectaron los autores durante los ensayos fue, como ya se ha introducido anteriormente, la diferenciación entre dos tipos de rotura en función del nivel de armadura de tensión (ρ). Para niveles de armado relativamente bajos se observó experimentalmente una rotura a flexión y una plastificación del mismo, por otro lado, si el ratio de armado era elevado la rotura se define por punzonamiento [10].

El modelo desarrollado fue el primero en explicar, de manera consistente, la rotura por punzonamiento. Este se basa en el equilibrio de un sector o cuña delimitada por dos fisuras radiales consecutivas y frontalmente por la fisura tangencial producida por la rotura, tal y como muestra la Figura 2.5b. El elemento de hormigón resistente propuesto es una cáscara troncocónica que une la fisura diagonal y la raíz de la columna. Dicho cono está sujeto a un estado triaxial de tensiones importante, donde dos ejes actúan en compresión y permiten aumentar así la resistencia a compresión del hormigón.

El criterio de fallo se define a partir por la deformación a cortante última (expansión) del elemento cónico antes mencionado [3].

La Figura 2.5 muestra los esquemas estáticos y el patrón resistente/de rotura del modelo propuesto por *Kinnunen y Nylander*. En ella se puede observar la cáscara troncocónica resistente sobre la raíz de la columna.

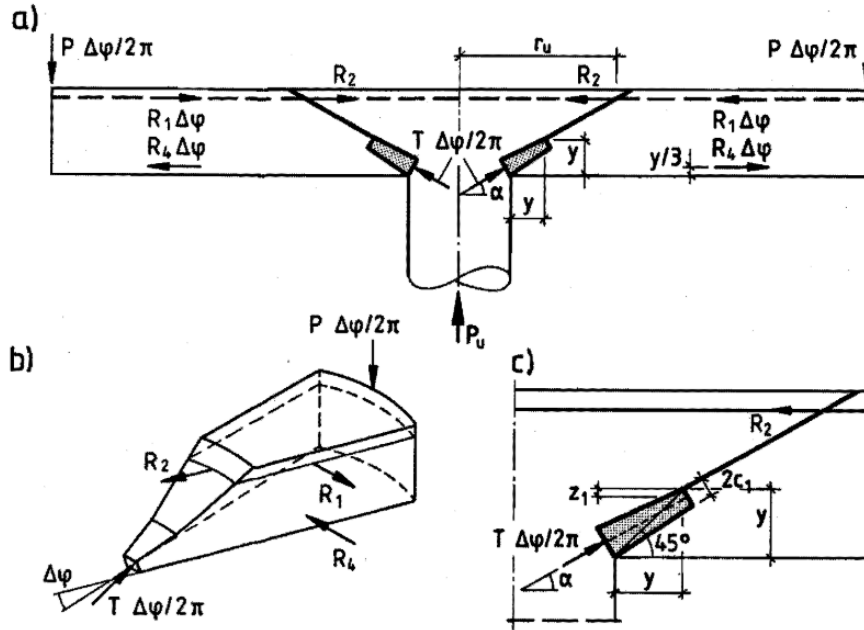


Figura 2.5: Modelo mecánico propuesto por *Kinnunen y Nylander* (1960) [3]

Según el modelo presentado por *Kinnunen y Nylander*, la predicción de la resistencia última a punzonamiento se obtiene de igualar $V_{u,c}$ y $V_{u,s}$ de las respectivas ecuaciones (2.1) y (2.2), e iterativamente obtener k_x .

Cabe mencionar que $V_{u,c}$ depende de la tensión última del hormigón σ_{cu} y se obtiene al imponer $\sum V = 0$.

$$V_{u,c} = \kappa \pi \eta d^2 k_x \left(\frac{1 + 2k_x/\eta}{1 + k_x/\eta} \right) \sigma_{cu} f(\alpha) \quad (2.1)$$

$$\text{Donde: } \eta = \frac{c_2}{d} \quad \text{y} \quad f(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)(1 - \tan(\alpha))}{1 + \tan^2(\alpha)}$$

A su vez, $V_{u,s}$ depende de la tensión de plastificación del acero f_y , la cantidad porcentual de armadura ρ y la forma. Dicha expresión se obtiene

imponiendo $\sum M = 0$ y ofrece tres casos distintos en función de dónde el acero plastifica. En esta revisión de la literatura únicamente se expone el caso dónde el acero plastifica dentro del cono de punzonamiento, dentro de un radio r_u y con r_f el radio del área circular comprendida por el tronco-cono [3].

$$V_{s,u} = \kappa 4\pi \rho f_y dr_f \left[1 + \ln \left(\frac{\delta d}{2r_u} \right) \right] \frac{1 - k_x/3}{\delta - \eta} \quad (2.2)$$

$$\text{Donde: } \delta = \frac{l_{slab}}{d}$$

2.1.2. Modelos mecánicos recientes

Tras el desarrollo inicial de los modelos analíticos (*Kinnunen y Nylander* (1960)) y empíricos (*Moe* (1961)) muchos investigadores han realizado modelos propios, intentando perfeccionar los iniciales ya sea para explicar de manera precisa el flujo de cargas y la rotura o intentar proveer a los distintos códigos de una formulación sencilla y útil en el día a día sin utilizar formulaciones empíricas.

Adicionalmente, distintos autores han analizado varios parámetros que afectan el punzonamiento, como son la cantidad de armadura ρ , diferencias entre punzonamiento y cortante, efecto tamaño, etc. En esta sección alguno de ellos será revisado.

Modelo de Broms - Influencia del efecto tamaño

Broms [13], en sus publicaciones y trabajo doctoral, propuso un modelo mecánico sofisticado y conduciendo a muy buenos resultados, con un mecanismo análogo al propuesto por *Kinnunen y Nylander*. Pese a ello, dada la complejidad del modelo propuesto, nunca se ha integrado completamente en ningún código de diseño [15].

La teoría presentada por *Broms* introduce dos modificaciones importantes sobre el modelo de *Kinnunen y Nylander*. Primero, *Broms* utiliza en su formulación valores globalmente reconocidos sobre las propiedades mecánicas del hormigón en lugar de calibrar el modelo frente ensayos específicos. Segundo, *Broms* calcula varios espesores de la zona de compresión en direcciones radiales y tangenciales en lugar del proceso iterativo propuesto por *Kinnunen y Nylander*.

A diferencia de *Kinnunen y Nylander*, *Broms* propone una rotura de punzonamiento asociada a dos fenómenos, los cuales sucede uno antes de otro (dependiendo de la configuración geométrica y propiedades) y es el que define la resistencia a punzonamiento [13].

Según *Broms*, la resistencia a punzonamiento viene determinada por el mínimo de:

1. Mecanismo a deformación debida a compresión tangencial crítica
2. Mecanismo a compresión radial crítica

El primer criterio de fallo a comprobar, V_ϵ , asume que el hormigón, bajo un estado de carga biaxial (debido a momentos en direcciones radiales y tangenciales), situado en la zona columna-losa llega a un estado crítico de deformaciones tangenciales (debidas a flexión) y el material, a causa de ello, sufre una relajación (perdiendo su cohesión interna) que conduce a una fisuración “a cortante” casi vertical. Una vez se llega dicha relajación, la zona a compresión colapsa dada la pérdida de resistencia de la biela comprimida que transmite la carga vertical de la columna a la losa.

Adicionalmente, la propagación de la fisura se acelera dado que existe un campo de deformaciones a tracción tangenciales (las que inician el colapso), a su vez, según *Broms*, esta se inicia en el borde columna-losa, donde otros autores reportan una caída de las deformaciones justo antes de llegar a la carga última. La Figura 2.6 muestra el criterio de rotura.

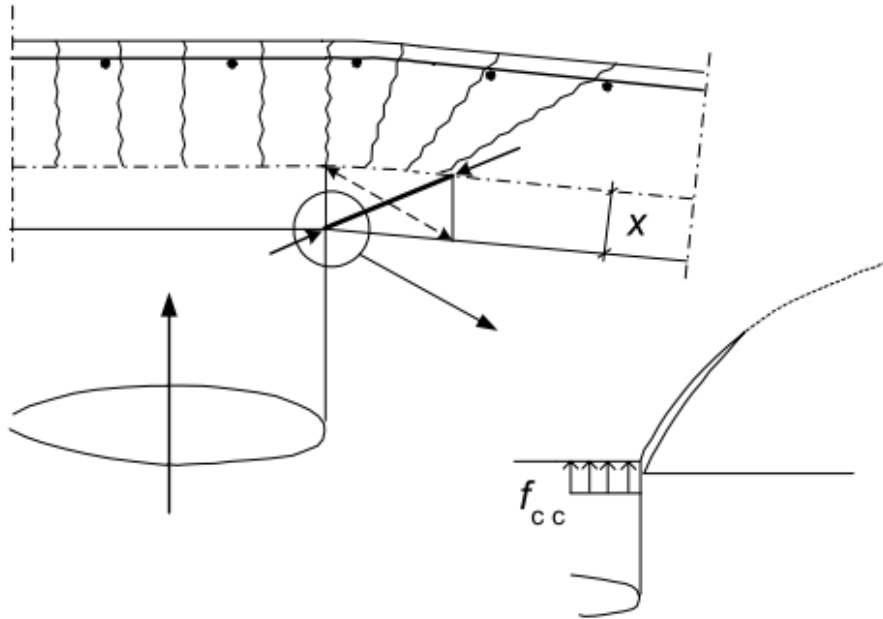


Figura 2.6: Criterio de rotura V_ϵ [13].

Broms, a partir del comportamiento de un cilindro de hormigón cargado uniaxialmente, define la deformación tangencial de compresión crítica, ϵ_{cpu}

como función de la resistencia del hormigón y el espesor del hormigón bajo compresión.

$$\varepsilon_{cpu} = 0,0010 \left(\frac{25}{f_{cc}} \right)^{0,1} \cdot \left(\frac{0,15}{x_{pu}} \right)^{1/3} \quad (2.3)$$

A partir de la Ec.(2.3), la resistencia a punzonamiento V_ε se puede obtener en el marco de la teoría lineal de vigas y condiciones de equilibrio [3].

El segundo criterio de fallo a verificar, V_σ , asume (de manera similar a *Kinnunen y Nylander*) que en la zona inferior de la losa (posteriormente a la fisuración a flexión-cortante) se crea una cáscara troncocónica de sección constante que transmite las cargas de la columna a la losa. El fenómeno de punzonamiento se dará cuando en dicha región se superen unas tensiones a compresión críticas.

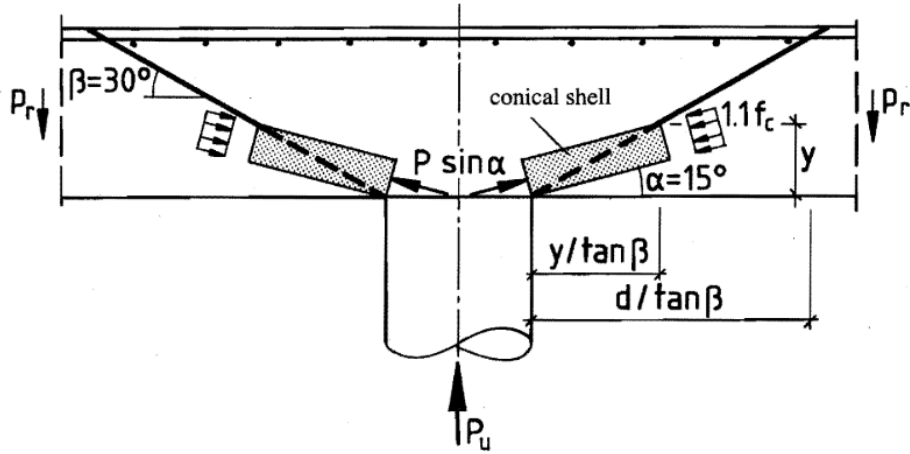


Figura 2.7: Criterio de rotura V_σ [3].

Tal y como se indica en la Figura 2.7, la carga última a punzonamiento viene dada por la cáscara troncocónica, la cual tiene una resistencia crítica de $1,1f_c$ considerando así el efecto de confinamiento debido al estado biaxial de cargas [3].

De las dos comprobaciones propuestas, el fenómeno que acostumbra a ser limitante en losas de hormigón planas es la deformación a compresión tangencial (V_ε), siendo V_σ la condición que gobierna en casos donde las columnas son pequeñas en relación con el espesor de la losa y la resistencia a compresión del hormigón es baja (propio de losas de cimentación) [13].

El efecto tamaño es el fenómeno que explica el porqué, al incrementar el tamaño de un elemento estructural, se le reduce la resistencia tensional

(ya sean tracciones, cortante, etc.). Muchos autores han intentado reproducir dicho fenómeno con modelos, los cuales algunos no lo hacen adecuadamente, conduciendo a desacuerdo entre ellos.

Recuperando la Ec.(2.3), *Broms* propone la expresión

$$\left(\frac{0,15}{x_{pu}}\right)^{1/3}$$

como el factor que tienen en consideración el efecto tamaño. Según el autor, dado que el factor afecta por igual a tensiones y deformaciones, el módulo de Young es una propiedad que no se ve afectada por el efecto tamaño.

Gustafsson y Hillerborg [16] propusieron una expresión para contemplar el efecto tamaño en la resistencia de vigas a cortante a partir del modelo *Fictitious Crack Model* propuesto por *Hillerborg et al.* [17].

Aun así, *Broms* cuestiona la aplicabilidad de dicho modelo para el fenómeno del punzonamiento, dada la mayor fragilidad que presenta este frente la rotura a cortante en vigas. Como ejemplo, *Broms* cita la aplicación del mencionado modelo por parte de *Hallgren* [18] para la deformación crítica a compresión tangencial, donde los resultados sugiere no ser adecuados.

Por ello, *Broms* propone que, para roturas realmente frágiles, el efecto tamaño se explique mediante la mecánica de fractura elástico-lineal ($f = k(d/d_0)^{-0,5}$) con una consideración adicional, el exponente que acompaña la relación de tamaños ha de ser aproximadamente $-1/3$ dada la fragilidad de la rotura.

Adicionalmente, *Broms* sugiere que la dimensión de referencia (d_0) sea la profundidad de la zona de compresión, dado que la rotura a punzonamiento sucede tras el colapso de esta [13].

Tras la recopilación literaria en punzonamiento de *Lantsoght* [19], y acorde con lo expresado por *Broms* [13], existe bastante discordancia entre investigadores alrededor del efecto tamaño, conduciendo a cada autor usar modelos distintos. Pese a los varios modelos propuestos, existe una afirmación generalizada de que el tamaño de forma tiene una importancia relevante, especialmente usando hormigones de altas prestaciones y bajo solicitaciones a cortante.

Modelo analítico de *Ph.Menétrey* - Influencia de la armadura

A diferencia de otros autores presentados en la revisión de estado del arte, *Menétrey* [20][21] propone un modelo en el que la resistencia a tracción del hormigón a lo largo de la línea de fisuración es el punto clave, en comparación a otros modelos que se centran en la resistencia de la cáscara troncocónica a compresión.

Así pues, la resistencia a punzonamiento se puede calcular a partir de la integración de la componente vertical de las tracciones que presenta el hormigón en la superficie cónica de la rotura. Adicionalmente, *Menétrey* computa también la contribución vertical de la armadura dispuesta en la conexión losa-columna (armadura longitudinal, armadura a cortante y armadura activa) y que cruza la fisura. La Ec.(2.4) y Figura 2.8 muestran el cómputo de todos los esfuerzos resistentes [21].

$$F_{pun} = F_{ct} + F_{dow} + F_{sw} + F_p \quad (2.4)$$

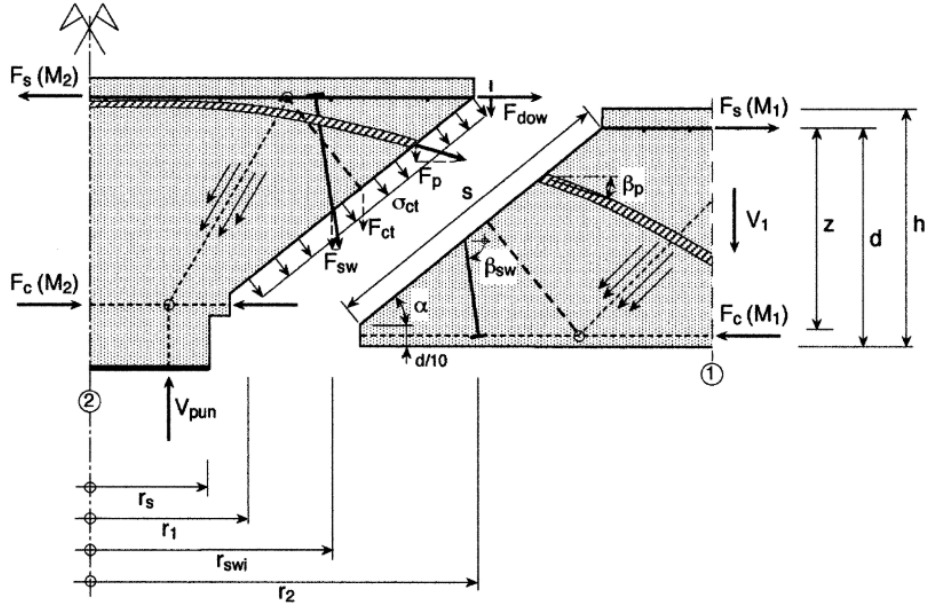


Figura 2.8: Esquema mecánico propuesto por *Menétrey*, considerando las tracciones en el hormigón como punto clave del modelo [21].

F_{ct} es la componente de punzonamiento que contempla la resistencia a tracción del hormigón (elemento clave del modelo) y se expresa en función de la resistencia tracción f_t , parámetros geométricos (r_1 , r_2 , r_s), cantidad de armadura (implícitamente en función de ξ) y dos parámetros que determinan el efecto tamaño (μ , η) los cuales fueron calibrados numéricamente (μ) y experimentalmente (η).

Los otros valores que constituyen la Ec.(2.4), el efecto pasador (*dowel effect*) (F_{dow}), la contribución de la armadura dispuesta a cortante (F_{sw}) y la contribución de los tendones de postesado (F_p) son la proyección vertical de cada elemento y se centran principalmente en las secciones de todas las

barras (suma de contribuciones indiferentemente de la dirección) y su resistencia. la formulación detallada se muestra en [20][21].

Para verificar la efectividad del modelo propuesto, *Menetrey* en [21] presenta una comparación entre el propio modelo y la base de datos desarrollada por el grupo de trabajo 4.3 del *fib*. Dicha comparativa se presenta en los gráficos de la Figura 2.9.

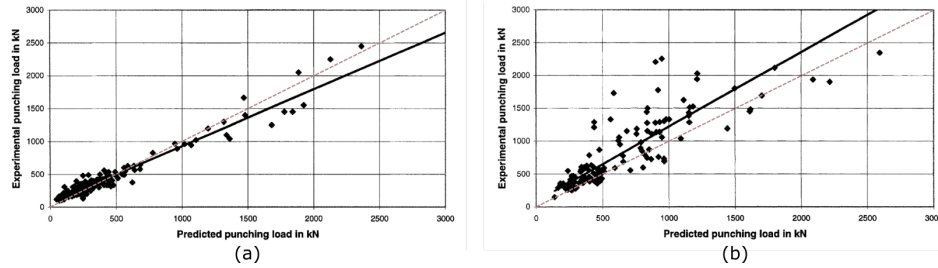


Figura 2.9: Resultados de la comparativa modelo-ensayos experimentales sin armadura de punzonamiento (a) y con armadura de punzonamiento (b) [21].

Pese algunas suposiciones que hizo el autor durante la comparativa (dado que algunos ensayos de la base de datos no disponían de suficiente información) se puede observar que, para el caso de roturas sin armadura de punzonamiento, el modelo propuesto presenta buenos resultados, con relativamente baja dispersión respecto el eje ideal. La regresión lineal de los resultados se posiciona algo por debajo del eje 1:1, estando así del lado de la seguridad (infraestimando la resistencia última), por otro lado, solo en casos de carga muy elevados aparece una diferencia apreciable entre el resultado ideal y el resultado del modelo.

Por otro lado, los resultados propuestos para losas con armadura a punzonamiento no son tan positivos. Aparece una dispersión importante entre resultados y la regresión lineal resultante se posiciona por encima del eje 1:1, resultando en un modelo que sobrestima los resultados a punzonamiento.

Menétrey también estudió la influencia de la armadura longitudinal y concéntrica sobre la rotura a punzonamiento, así como la transición que existe entre una rotura a flexión y una rotura a punzonamiento [3].

Del mismo *Menétrey* y autores anteriores que han estudiado el punzonamiento, se pueden observar tres tipos de rotura en una situación de punzonamiento previsible :

1. Rotura a flexión de la losa fruto de la formación de un mecanismo de líneas de rotura plástica. En dicho mecanismo las distintas partes de la losa experimentan solamente rotaciones relativas (entre partes que comparten líneas de rotura)

2. Rotura a punzonamiento, generando un cono de rotura característico del punzonamiento (mostrado anteriormente)
3. Rotura debido a una mala adhesión hormigón-acero

De las roturas mencionadas, la tercera no es común ya que actualmente la adhesión entre acero y hormigón esta solucionada.

En referencia a las dos primeras roturas propuestas por anteriores autores, *Menétrey* realizó un conjunto de ensayos sobre losas octagonales de 120mm de espesor y una luz de 1100mm. Los resultados que se obtuvieron a partir de la rotura se presentan en la Figura 2.10.

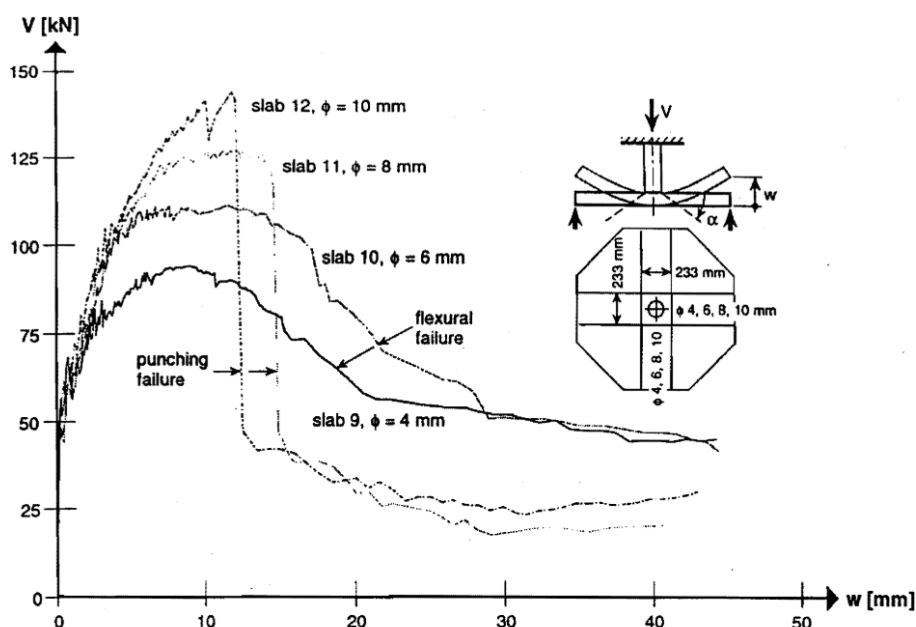


Figura 2.10: Curvas Carga-Desplazamiento para distintas secciones de armadura [21]

De las curvas Carga-Desplazamiento de la Figura 2.10 se puede ver claramente la influencia que presenta el incremento de la sección de armadura.

Una primera observación es el incremento que se produce en la resistencia última (V) frente al incremento del diámetro de la armadura ($\varnothing 4mm \rightarrow \varnothing 10mm$).

Por otro lado, el incremento del diámetro induce a un cambio en el comportamiento de la rotura, pasando de una rotura dúctil (rotura a flexión), con una curva descendente suave tras alcanzar la carga última ($\varnothing 4 - 6mm$) frente a una rotura completamente frágil (rotura a punzonamiento), con un

descenso muy fuerte (aproximadamente del 50-60 %) de la resistencia de la losa tras alcanzar la resistencia última.

Este hecho indica cuanto peligrosa puede ser la rotura por punzonamiento (sin armadura específica) frente a roturas a flexión.

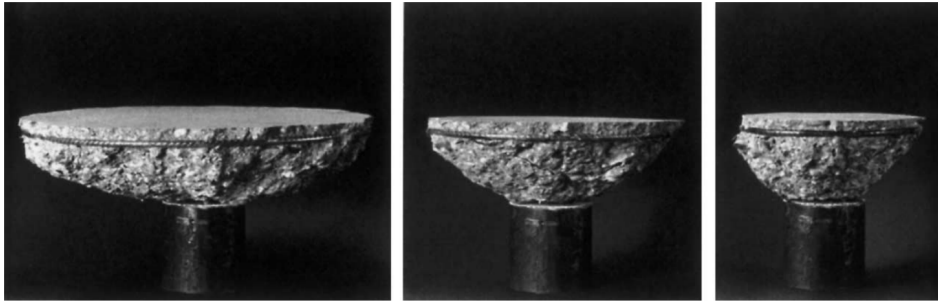


Figura 2.11: Distinta geometría de los conos de punzonamiento, con $\alpha = 30^\circ$, 45° y 60° respectivamente [21].

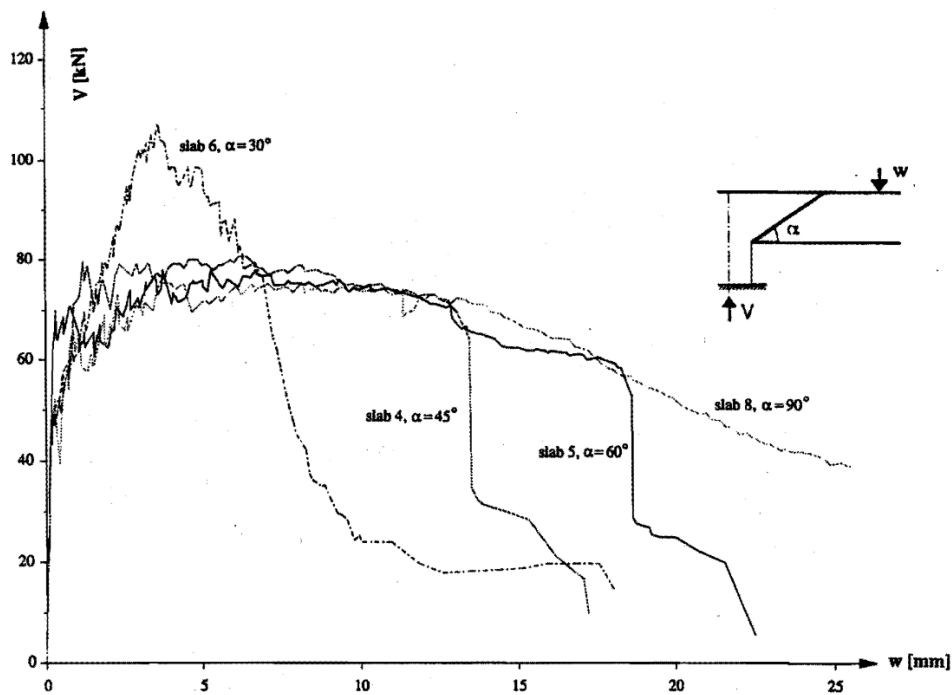


Figura 2.12: Curvas Carga-Desplazamiento en función del ángulo de fisuración en el cono de punzonamiento [3].

Adicionalmente, *Menétrey* [21] analizó la influencia de la geometría del cono de rotura y la vinculó a una transición entre una rotura a flexión y una

rotura a punzonamiento. Por ello realizó distintos ensayos con armadura concéntrica (en forma de anillo) de distinto diámetro, forzando así el cono de rotura a una geometría específica. Con los ensayos, *Menétrey* identificó como parámetro clave el ángulo que forma la fisura y la resistencia última, a parte de la forma de la curva Carga-Desplazamiento.

Los resultados se muestran en las Figuras 2.11 y 2.12. De la Figura 2.12, se puede observar que, con el incremento del ángulo de la fisura, incrementa la ductilidad de la losa. Así pues, la variación del ángulo revela una transición entre la rotura a punzonamiento y la rotura a flexión [21].

Menétrey propuso una expresión analítica que explicaba dicho fenómeno geométrico, expuesta en la Ec.(2.5) [22].

$$F_{fallo} = F_{pun} + (F_{flex} - F_{pun}) \left[\sin \left(\frac{\pi}{\pi - 2\alpha_0} (\alpha - \alpha_0) \right) \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

Con α_0 siendo el ángulo de fisura asociado a una rotura a punzonamiento “pura”.

Modelo de *Muttoni* - Critical Shear Crack Theory

Uno de los últimos modelos con cierta relevancia es el presentado por *Muttoni* en [14], siendo este la base teórica del cálculo a punzonamiento presentado en el reciente *fib - Model Code 2010* [23].

El criterio de rotura en el que se basa el modelo, mencionado *Critical Shear Crack Theory (CSCT)*, sostiene que la resistencia a punzonamiento se reduce al aumentar la rotación última de la losa. Dicha caída se debe a la reducción de la resistencia a cortante, tras la aparición de una fisura crítica debida, a su vez, al cortante que se propaga a través de una biela de hormigón [14], tal y como muestra la Figura 2.13b y como han apuntado otros autores en el pasado de manera similar (*Kinnunen y Nylander, Broms*, etc).

Dicha afirmación, según *Muttoni* [14], se sustenta en el hecho que, por un lado, las deformaciones radiales a compresión se relajan (volviéndose cero) en el sofito de la conexión losa-columna tras alcanzar un cierto nivel de carga e incluso se detectan tracciones momentos antes de que suceda la rotura por punzonamiento. Este fenómeno se puede explicar mediante el desarrollo de una biela “en forma de codo” (Figura 2.13c) y un tirante el sofito de la losa.

Por otro lado, ensayos anteriores a los realizados por *Muttoni* confirman el importante papel que conforma la fisura a cortante crítica, los cuales fueron realizados con anillos concéntricos de armadura en el borde de la losa y en el borde de la losa conjuntamente en zonas próximas a la crítica (de

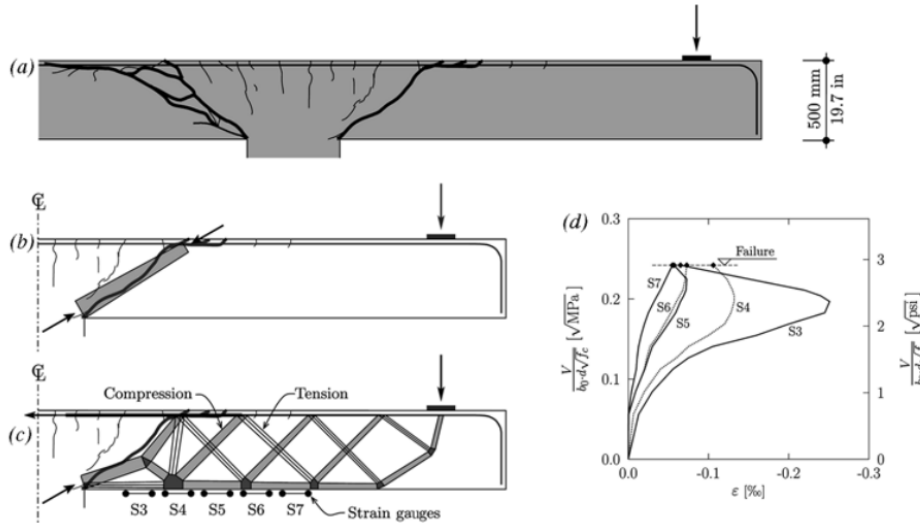


Figura 2.13: Modelo analítico propuesto por *Muttoni* [14].

manera similar a los ensayos de *Menétrey* [22]). De esta manera se desarrollaron solamente fisuras radiales y, en el caso con armadura concéntrica adicional, se demostró que dicha armadura inició de manera prematura la fisuración, reduciendo así la capacidad última de la losa.

Muttoni, para el desarrollo de su modelo, propone la relación *Resistencia a punzonamiento - Giro de la losa* como parámetro clave para medir las deformaciones. Este parámetro sigue la idea presentada por *Muttoni y Schwartz* [24], en la que se propone que el ancho de la fisuración crítica (clave en el desarrollo del punzonamiento según *Muttoni*) es proporcional al producto $\psi \cdot d$, siendo ψ el giro de la losa y d el espesor de esta.

Dicha propuesta conduce a un criterio de rotura a punzonamiento semi-empírico presentado inicialmente en 1991. Si se considera el efecto de la rugosidad de la fisura (interacción mecánica de los áridos) propuesto por *Walraven y Vecchio y Collins*, se puede obtener una reformulación del criterio inicial, conduciendo a la expresión siguiente.

$$\frac{V_R}{b_0 d \sqrt{f_c}} = \frac{3/4}{1 + 15 \frac{\psi d}{d_{g0} + d_g}} \quad (2.6)$$

Siendo d_g el tamaño máximo de árido en la dosificación y d_{g0} el tamaño de referencia, igual a 16mm.

Según la propuesta de *Muttoni* en [14], la rotura a punzonamiento ocurrirá en la intersección de la función $V_R(\psi)$, presentada en la Ec.(2.6), con la curva *Carga-Giro* ($V - \psi$) que desarrolla una losa bajo punzonamiento.

Así pues, para poder encontrar dicha intersección, es necesario conocer la relación entre el giro y la carga aplicada. Para un caso genérico de carga y de condiciones de contorno, dicha relación se puede obtener mediante simulaciones numéricas no-lineales del comportamiento de la losa a flexión.

En el caso de tener axi-simetría, la obtención de la relación *Momento-Curvatura* es directo, considerando la redistribución de momentos y el incremento en la resistencia a punzonamiento debido al confinamiento en el plano del hormigón. El caso axi-simétrico de una columna aislada, con algunas simplificaciones, puede ser analizado analíticamente.

La ley *Momento-Curvatura* es necesaria para desarrollar la relación *Carga-Giro* tal y como muestra *Muttoni* en las *Ec.(6)* y *Ec.(7)* de la referencia[14].

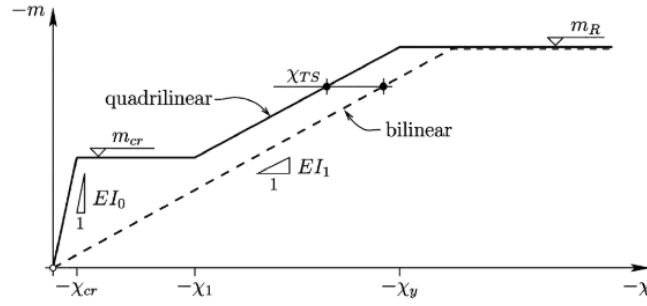
Muttoni, en [14], propone dos relaciones de *Momento-Curvatura* de una losa a flexión, tal y como muestra la Figura 2.14a, siendo una cuadrilineal y otra bilineal. La primera cuenta con los fenómenos de redistribución y plastificación del acero, la segunda, es una simplificación en la que no se considera la resistencia a tracción del hormigón o fenómenos de endurecimiento, conduciendo a una curva bi-lineal que otros autores presentaron con anterioridad (*Kinnunen y Nylander*).

Aplicando una de las dos leyes de *Momento-Curvatura* sobre la formulación propuesta por *Muttoni* se puede llegar a obtener una de las dos curvas presentadas en la Figura 2.14b. La curva mencionada *Eq.(6)* corresponde a la aplicación en la formulación de la ley cuadrilineal, mientras que la curva *Eq.(7)* corresponde a la aplicación en la formulación de la ley bilineal.

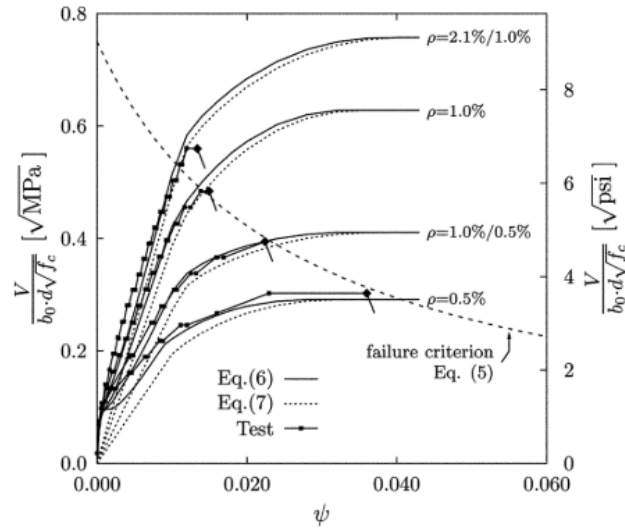
Tal y como se puede observar de la comparación presentada en la Figura 2.14b, las aproximaciones que ofrece la relación *Carga-Giro* para el caso de una ley cuadrilineal es muy buena, con intersecciones con el criterio de rotura muy cercanas a la rotura real.

Para casos con alto grado de armado, en el que la rotura es por punzonamiento (y no por flexión o flexión-punzonamiento) la intersección entre la relación *Carga-Giro* y el criterio de rotura, usando una ley bilineal de *Momento-Curvatura* también provee de buenas aproximaciones. No es el caso para losas con menor grado de armado.

La formulación para la obtención de la relación *Carga-Giro* y la ley *momento-curvatura* presentada por *Muttoni* en [14] es relativamente compleja para su uso normativo y la aplicación en el día a día del diseño. Por ello, el mismo autor propone una formulación y procedimiento más sencillos para su aplicación en el diseño y formulación normativa aunque usando el mismo principio, en el que la rotura sucederá en la intersección entre la curva que representa el criterio de rotura y la curva que representa la relación *Carga-Giro*.



(a) Curvas momento-curvatura cuadri-lineal y bi-lineal [14].

(b) Comparación de ensayos realizados por Kinnunen y Nilander frente al criterio de rotura (Ec.(2.6) equivalente a *failure criterion* Eq.(5)) y las expresiones de Carga-Giro mostradas como Eq.(6) para la ley momento-curvatura cuadri-lineal y Eq.(7) para la ley bi-lineal [14].Figura 2.14: Predicción de la rotura a punzonamiento propuesta por *Muttoni*

La formulación tipo para la aplicación normativa propuesta por *Muttoni* es:

$$\psi = 0,33 \frac{L}{d} \frac{f_y}{E_s} \left(\frac{V_d}{8m_{Rd}} \right)^{3/2} \quad (2.7)$$

$$\frac{V_{Rd}}{b_0 d \sqrt{f'_c}} = \frac{2}{3\gamma_c} \frac{1}{1 + 20 \frac{\psi d}{d_{g0}} + d_g} \quad (2.8)$$

Muttoni propone la utilización de las ecuaciones (2.7) y (2.8) para poder predecir, de manera simplificada, la resistencia última de una losa a

punzonamiento.

Para poder aplicar las expresiones, se ha de imponer $V_d = V_{Rd}$ y encontrar, de manera iterativa, el giro (ψ). Aún así, encontrar iterativamente un valor puede ser poco práctico en un marco de diseño simplificado y formulación normativa. *Muttoni*, a modo de verificación simplificada, propone encontrar el giro en la Ec.(2.7) imponiendo la carga de diseño factorizada, V_d . Dicho giro (ψ_d) se impone posteriormente en la Ec.(2.8) y se deduce V_{Rd} asociado al giro impuesto. Llegados a este punto, solo cabe verificar si el valor de V_{Rd} (Punto B de la Figura 2.15) es menor que V_d , cuyo caso sugeriría que el diseño es seguro.

La Figura 2.15 muestra la intersección entre curvas y el procedimiento a seguir con la formulación normativa propuesta por el autor.

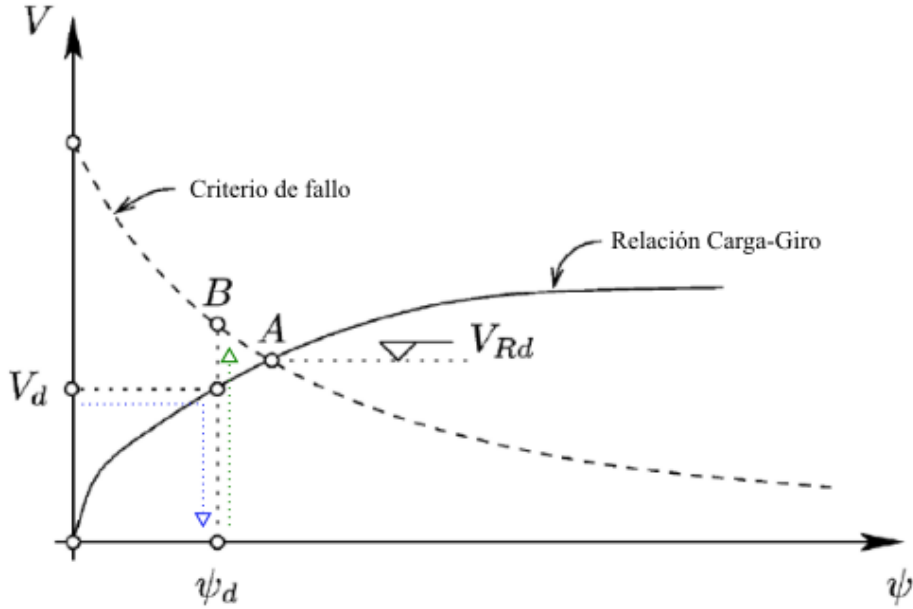


Figura 2.15: Procedimiento de diseño para la verificación a punzonamiento [14].

2.1.3. Modelo de referencia - Compression Chord Capacity Model de *Marí et al.*

Recientemente *Marí et al.*, en [11], han presentado un nuevo modelo analítico capaz de reproducir la capacidad última a punzonamiento de losas de hormigón con y sin armadura de cortante. Dicho modelo, aparte de predecir la carga última, explica de manera consistente la fenomenología del problema, así como proveer de motivación física a algunos de los parámetros usados en los códigos.

Al igual que otros autores (p.e *Muttoni*) existe la conciencia de que, pese haber desarrollado durante bastantes décadas distintos modelos relacionados con el punzonamiento, todavía no hay un consenso sobre el/los modelos que más se ajustan a la realidad. Adicionalmente, tal y como ya se ha comentado anteriormente, existen modelos e incluso las normativas estatales que se basan en expresiones empíricas ajustadas basadas en ciertos ensayos, pero sin capturar la física del problema ni ser capaces de generalizarla.

Por ello, la intención de los autores en la referencia [11] es exponer un modelo mecánico simple (típico de formulaciones normativas) que permita la predicción de la resistencia última a punzonamiento, tanto para losas con o sin armadura específica de cortante.

De manera similar a como se ha expuesto con anterioridad, *Marí et al.* plantean la rotura a punzonamiento fruto del colapso del hormigón situado en las inmediaciones de la columna en el paramento comprimido. El proceso de fallo se inicia con fisuraciones tangenciales y radiales, de las cuales una fisura tangencial se desarrolla en profundidad, al aumentar la carga y tras una redistribución de momentos tangenciales y radiales (dado que la mecánica ha de generar movimientos consistentes y equilibrios internos).

Cabe destacar que el punzonamiento se sucede del colapso del hormigón, el cual está bajo un estado de doble compresión y tracción (tracciones debido al esfuerzo cortante).

El modelo presentado por los autores en [11] se basa en un modelo introducido con anterioridad por los mismos en [25][26], llamado *Compression Chord Capacity Model*, para la resistencia a cortante de vigas de hormigón, y el cual parte de sus principios se basan en el aumento de la resistencia a cortante de la biela horizontal debido a las compresiones de la misma.

Las dos principales expresiones son:

$$V_u = (V_c + V_w + V_l) + V_s = f_{ctm}bd(v_c + v_w + v_l + v_s) \quad (2.9)$$

$$v_c = \frac{V_c}{f_{ctm}bd} = 0,682\xi \frac{x}{d} \sqrt{1 - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_1} + \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_1^2}} \quad (2.10)$$

Donde v_c es la resistencia adimensional a cortante, la cual jugará también un papel importante en el caso de las losas, y a la cual se le ha de prestar atención, dado que introduciendo ligeras modificaciones para contemplar la fenomenología de las losas la misma Ec.(2.10) es aplicable en el proceso de obtención de la resistencia a punzonamiento.

Para el caso de losas de hormigón armado, donde la armadura no ha plastificado previo a la rotura, la resistencia a punzonamiento se puede escribir

como:

$$V_{cu} = V_c + V_w$$

donde V_c contempla la resistencia a compresión-cortante de la zona comprimida de la losa y V_w contempla la resistencia a cortante del hormigón transferida a lo largo de la fisura inicial. Para poder calcular correctamente la componente V_c se deberán contemplar las características de la rotura a punzonamiento.

Posición de la fisura crítica

Si se analiza la *posición de la fisura crítica*, *Marí et al.* proponen s_{crit} como la distancia desde el perímetro donde la fisura principal entra en contacto con la zona comprimida del hormigón (profundidad x), llamado *perímetro crítico*, hasta el paramento de la columna.

Así pues:

$$s_{crit} = x \cdot \cot \theta = s_{crack} \frac{x}{d} \quad (2.11)$$

Donde s_{crack} es el perímetro referente al inicio de la fisura y θ es el ángulo que forma la fisura con la horizontal.

Por otro lado, si se toma el momento de fisuración radial por unidad de ancho, m_{crack} , se puede obtener el radio donde la fisuración se inicia. Dicho momento se puede obtener de la teoría de la elasticidad, imponiendo igualdad de momentos:

$$m_r(r) = \frac{V}{4\pi}(1 + \nu) \ln \left(\frac{r_0}{r} \right) \equiv m_{crack} \rightarrow r = r_0 \cdot e^{-10,5 \cdot m_{crack} / V_{Ed}} \quad (2.12)$$

Donde V es la carga aplicada, ν es el coeficiente de Poisson ($\nu = 0,2$) y r y r_0 son las distancias desde el centro de la columna a los puntos de momento cero y dónde el momento se está analizando, respectivamente.

Reescribiendo la Ec.(2.11) conjuntamente con la Ec.(2.12):

$$\begin{aligned} \frac{s_{crit}}{d} &= \frac{s_{crack}}{d} \frac{x}{d} = \frac{r_{col}}{d} \left(\frac{r}{r_{col}} - 1 \right) \frac{x}{d} = \\ &= \frac{r_{col}}{d} \left(\frac{r}{r_{col}} e^{-10,5 \frac{m_{crack}}{V_{Ed}}} - 1 \right) \frac{x}{d} \quad \text{con } \frac{s_{crack}}{d} = \cot \theta \leq 2,5 \quad (2.13) \end{aligned}$$

Dado que la Ec.(2.13) no es práctica para el propósito de diseño, *Marí et al.* sugieren en [11] que la distancia al perímetro crítico puede simplificarse

a $s_{crit} = 0,5d$, alineado con las normativas *ACI* y *Model Code 2010*. Dicha simplificación se razona con la comparativa que los autores han realizado entre resultados de ensayos (incorporados en bases de datos) y la expresión (2.13), usando como parámetros a introducir V_{Ed} , con ratios de armado $\rho < 2\%$ y evaluando s_{crit}/d .

Los resultados obtenidos condujeron a un rango de s_{crit} entre $0.4d$ y $0.7d$. Considerando que las losas ensayadas contenían un nivel de armado longitudinal importante (debido a que la intención era la rotura por punzonamiento) un valor razonable es el propuesto de $s_{crit} = 0,5d$.

La Figura 2.16 muestra, a modo de sumario, la posición del perímetro crítico y de fisuración, al igual que la ley de momentos contemplada.

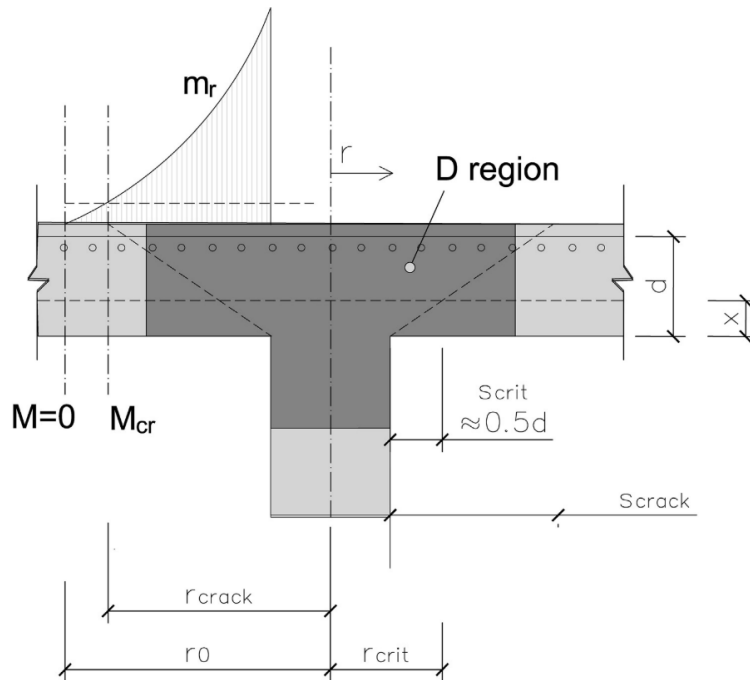


Figura 2.16: Representación de los distintos parámetros utilizados, incluyendo el perímetro crítico y el perímetro de fisuración [11].

Efecto multiaxial en la zona comprimida

Por otro lado, si se analiza el *efecto multiaxial en la zona comprimida*, *Marí et al.* proponen el incremento de la resistencia del hormigón, dado que en la zona comprimida de la losa aparecen tensiones de compresión en varias direcciones, siguiendo así la línea presentada en la literatura. Cabe destacar que, tal i como se indica en [11], no existe un estado tri-axial de compresión, ya que en el hormigón también aparecen tensiones cortantes, que estas a su vez llevan a tracciones en una de las direcciones principales.

Los autores proponen que dicho estado multiaxial se debe a: compresiones radiales σ_r , compresiones tangenciales σ_φ y compresiones verticales σ_v acompañado por tensiones tangenciales τ en el plano de las tensiones radiales, tal y como muestra la Figura 2.17b.

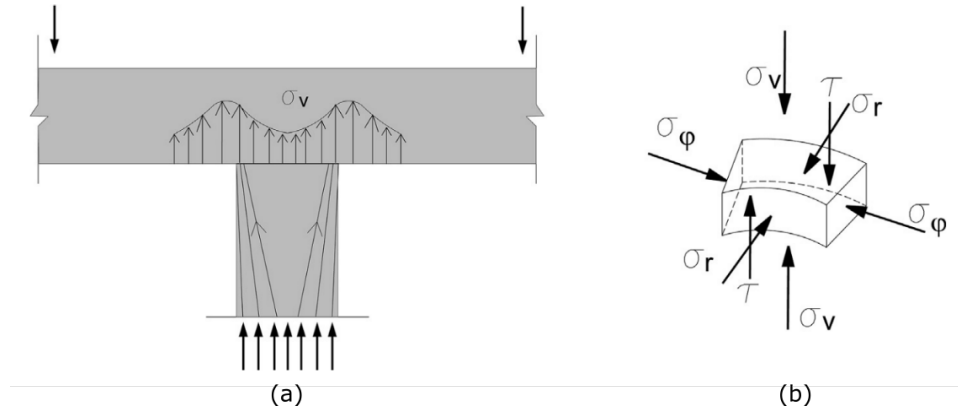


Figura 2.17: Corte esquemático de las tensiones verticales en la conexión losa-columna (a) y detalle del estado tensional en la misma zona (b) [11].

Marí et al., a diferencia de otros autores, sugieren que existen unas tensiones verticales (σ_v) que explícitamente generan confinamiento al hormigón en las zonas colindantes a la columna. Por ello, es necesario cuantificar su valor y cómo estas se distribuyen entre la columna y la losa.

Tras realizar estudios numéricos (dado que no existe información experimental al respecto), los autores afirman que existe una distribución no uniforme de tensiones verticales, con el máximo entre los paramentos de las columnas y el perímetro crítico, con valores comprendidos entre 1.25 y 1.5 veces la tensión media vertical en la zona de la conexión, tal y como muestra la Figura 2.17a.

Tomando el valor de 1.25, cómo $\alpha = 1,25$, las tensiones verticales se pueden calcular como:

$$\frac{\sigma_v}{f_{ct}} = \frac{\alpha V}{f_{ct} \pi r_{crit}^2} = \frac{\alpha v}{r_{crit}/d} \simeq \frac{2,5v}{r_{crit}/d} \quad (2.14)$$

Con $v = V/(u_{crit} \cdot d \cdot f_{ct})$ la resistencia a cortante adimensional del hormigón.

Adicionalmente, también existe confinamiento por parte de las tensiones tangenciales (σ_φ), las cuales conjuntamente con las tensiones verticales confinan el hormigón en el plano vertical tangencial, incrementando así la resistencia a compresión en la dirección radial. En la referencia [11] se asume una participación equitativa entre ambas tensiones para el confinamiento

Para poder incorporar en el modelo el efecto del confinamiento por parte de las tensiones verticales y tangenciales, *Marí et al.* proponen utilizar la envolvente de fallo de Kupffer modificada, para poder saltar de tensiones en los tres ejes principales a un estado biaxial (donde trabaja la envolvente de fallo propuesta). De esta manera, se sustituye en la envolvente la resistencia del hormigón no confinada (f_c) por la resistencia confinada (f_{cc}), incrementando así la resistencia a cortante del hormigón. La Figura 2.18 muestra el salto mencionado de un estado triaxial a un estado biaxial considerando el confinamiento.

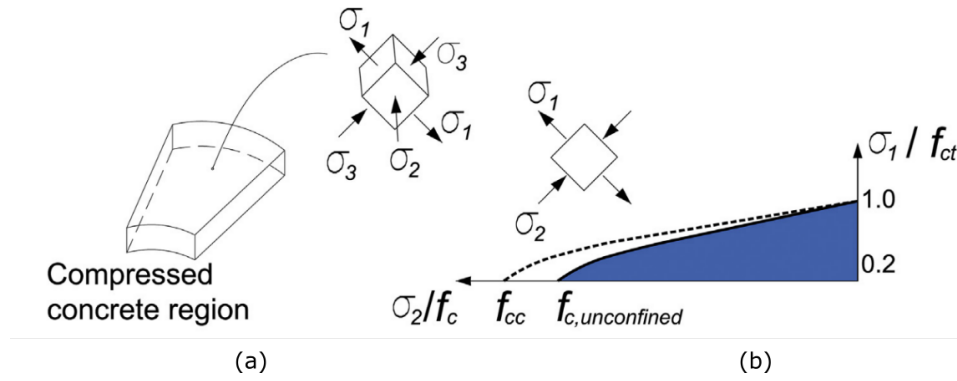


Figura 2.18: Estado de tensiones principales (a) y envolvente de Kupffer biaxial modificada (b) [11].

Para poder calcular el incremento en la resistencia gracias al confinamiento, *Marí et al.* adoptan la expresión del *Eurocódigo 2 (EN1992-1-1)*, mostrada en la Ec.(2.15).

$$f_{cc} = f_c \left(1,125 + 2,5 \frac{\sigma_{cc}}{f_c} \right) \text{ si } \frac{\sigma_{cc}}{f_c} \geq 0,05 \quad (2.15)$$

$$\sigma_{cc} = 0,5(\sigma_\varphi + \sigma_v) \quad (2.16)$$

Donde σ_{cc} es la tensión de confinamiento, conformada a partes iguales por la tensión tangencial y la tensión vertical (tal y como se ha mencionado anteriormente).

Asumiendo que las tensiones tangenciales son proporcionales a las tensiones radiales los autores son capaces de simplificar el problema. Dicha suposición es válida si aparece fisuración tanto radial como tangencial y la distribución de armadura es equitativa entre direcciones ortogonales ($\rho_x \approx \rho_y$).

La relación entre tensiones se obtiene mediante la relación entre momentos (por unidad de ancho) tangenciales y radiales. Tal y como presentan los autores en [11], dicha relación se puede tomar, de manera conservativa, como $m_\varphi/m_r = 1,5$. Aplicando la relación propuesta a la Ec.(2.16) se obtiene:

$$\sigma_{cc} = 0,5(1,5\sigma_r + \sigma_v) \quad (2.17)$$

Obtención de la resistencia a punzonamiento con armaduras longitudinales no plastificadas

Para la obtención de la resistencia a cortante en losas, *Marí et al.* proponen la expresión (2.10), desarrollada para vigas sometidas a cortante, con ciertas modificaciones. Previo a desarrollar completamente las modificaciones, es necesario conocer las tensiones radiales (σ_r), no introducidas hasta el momento.

Realizando el equilibrio de una cuña de hormigón, a la cual se le asume un comportamiento lineal en la zona no fisurada de la misma, se puede obtener la tensión radial. La Figura 2.19 muestra el equilibrio asumido, considerando la resistencia a cortante del hormigón (V_c) y los esfuerzos transmitidos por la fisura (V_w). De ella se pueden obtener las expresiones de equilibrio (mostradas en [11]) y finalmente la expresión referente a la compresión radial, mostrada en la Ec.(2.18).

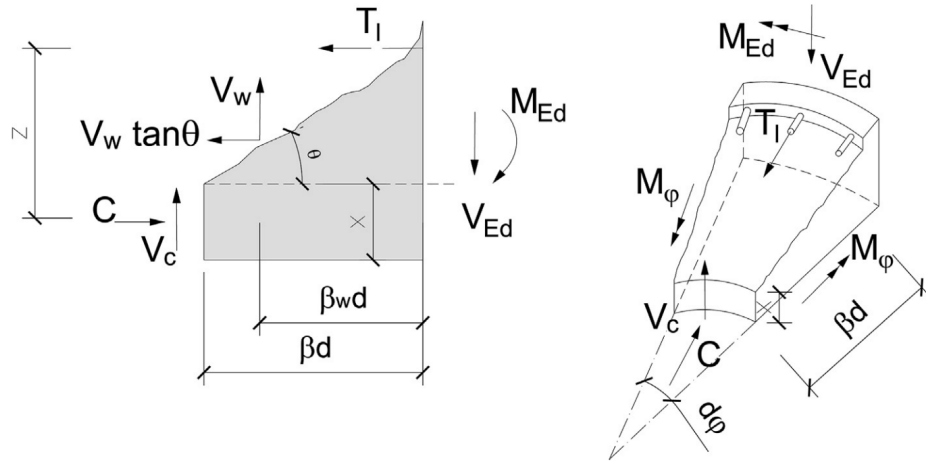


Figura 2.19: Equilibrio de fuerzas en una cuña de hormigón por debajo de la fisura [11].

$$\sigma_r(\lambda) = \frac{2\lambda C}{xz} = \frac{2\lambda \left(m_{crack} \frac{r_{crack}}{r_{crit}} + V_c \beta d + V_w \beta_w d (\tan \theta + \cot \theta) \right)}{x \left(d - \frac{x}{3} \right)} \quad (2.18)$$

Donde

λ es la posición de la carga C respecto el eje neutro (tomado como $\lambda = 0,425x$)

βd es la proyección horizontal de la fisura crítica. Siguiendo las suposiciones realizadas, $\beta d = 0,5d(d - x)/x$ con x la profundidad del eje neutro

$\beta_w d$ es el punto de aplicación de V_w

Una vez conocida la tensión radial, ya se está en posición de desarrollar la formulación para la resistencia a cortante. *Marí et al.* en [11] proponen la ya mencionada Ec.(2.10) como expresión para la obtención de V_c .

Cabe destacar, para la comprensión del modelo, que la Ec.(2.10) es simplemente la integración, en el espesor del hormigón, de la resistencia a cortante τ , en función de la tensión principal (a tracción - σ_1) y las tensiones normales (horizontal y vertical) y ya incluyendo distintos coeficientes. Es recomendable revisar la referencia [25] para comprender el paso a paso desarrollado.

Tomando la Ec.(2.10), reemplazando b (ancho de la viga) por u_{crit} (perímetro crítico) y la tensión σ_x por σ_r (la tensión vertical σ_y continúa siendo vertical $\equiv \sigma_v$ para losas) e incorporando las expresiones (2.14), (2.17) y (2.18) se puede resolver iterativamente para encontrar V_c . Ha de resolverse iterativamente dado que la tensión principal σ_1 no es conocida a priori y esta depende de τ .

Una vez resuelto, *Marí et al.* destacan que la solución es linealmente dependiente de la profundidad relativa del eje neutro, x/d , la resistencia a tracción del hormigón, la profundidad de la losa y las dimensiones de la columna (mediante u_{crit}). Por ello los autores proponen una expresión simplificada que muestra la linealidad con los parámetros expuestos.

Considerando por otro lado el valor de V_w , este según [11], es relativamente pequeño en comparación con V_c . Por ello se asumen valores estándar del hormigón para la definición de V_w , lo que resulta en un valor mínimo:

$$v_w = \frac{V_w}{f_{ctm} \cdot u_{crit} \cdot d} = 0,05 \quad (2.19)$$

Sumando le resultado obtenido para V_c con la Ec.(2.19) se obtiene finalmente la resistencia a punzonamiento para losas sin armadura de cortante:

$$V_{cu} = V_c + V_w = \xi \left(1,125 \frac{x}{d} + 0,425 \right) f_{ctm} \cdot u_{crit} \cdot d \quad (2.20)$$

Donde

ξ es el factor de tamaño, definido como $[2(d/a)^{0.2}] / \sqrt{1 + d_0/200} \not\leq 0,45$
 f_{ctm} es la resistencia a tracción media del hormigón
 u_{crit} es el perímetro crítico situado a una distancia de la columna
 $s_{crit} = 0,5d$

De la última expresión, cabe resaltar que, para el cálculo de x/d , es necesario disponer de la cuantía geométrica de armadura (ρ). Los autores, al igual que se presenta en la norma *EN1992-1-1*, toman para el cálculo de ρ un ancho efectivo igual al ancho de la columna más $3d$ a lado y lado de la columna/carga concertada y en ambas direcciones de armado ortogonales.

Adicionalmente, dado el menor canto y cuantía geométrica que presentan las losas frente a vigas, la proporción de cortante transferido a lo largo de la fisura es mayor en las losas. Por ello, los autores del modelo proponen la verificación de una resistencia a punzonamiento mínima.

Esta se escribe como:

$$V_{cu,min} = \left[\xi (1,125k_c + 0,375) + \frac{10}{d_0} \right] f_{ctm} \cdot u_{crit} \cdot d \quad (2.21)$$

Donde

$$k_c = x/d \leq 0,2$$

d_0 es el mínimo entre la profundidad específica (d) y 100mm

Los casos presentados por *Mari et al.* en [11] dónde la armadura longitudinal ha plastificado o se utiliza armadura de cortante quedan fuera del alcance de esta revisión del estado del arte, dado que no aportan mucha más información relevante para el comportamiento de las losas que se simularán en este trabajo.

2.2. Normativa y punzonamiento

En el presente, para poder realizar el cálculo resistente a punzonamiento de las losas se ha de recurrir a las normativas correspondientes de cada país. De manera general, y en comparación con las formulaciones ya presentadas hasta el momento, las expresiones usadas en prácticamente todos los códigos estructurales han sido obtenidas y ajustadas a partir de datos experimentales.

Justamente el hecho de utilizar formulación empírica ha sido la motivación de autores citados en este trabajo, como *Mari et al.* en [11] o *Muttoni* en [14], a desarrollar formulación con base racional y con la intención de ser utilizadas en el diseño, gracias a expresiones sencillas pero realistas. En esta dirección, cabe destacar que las expresiones propuestas para la verificación de la resistencia a punzonamiento en el *Model Code 2010* han evolucionado,

utilizando el modelo presentado por *Muttoni* y usando distintos niveles de precisión.

Para tener una referencia, se presentan dos normativas distintas, la norma *EN1992-1-1 (Eurocódigo 2)* [5] y la norma *ACI 318M-14 (Versión métrica)* [27]. Las cuales ambas se pueden clasificar como empíricas.

2.2.1. EN1992-1-1. Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings

La normativa europea EN1992-1-1 propone la comprobación en estado límite último de la resistencia a punzonamiento mediante la verificación de la desigualdad

$$v_{Ed} \leq v_{Rd,c} \quad (2.22)$$

La cual ha de cumplirse tanto en el perímetro de la columna como a una distancia determinada sobre la cual se define el perímetro crítico u_1 . Adicionalmente, si resulta necesario utilizar armadura específica de cortante, un tercer perímetro exterior $u_{out,ef}$ ha de verificarse.

Pese a ello, en esta literatura se presenta únicamente la verificación de losas planas sin armadura de cortante, y por ende, el perímetro crítico exterior no es necesario.

De acuerdo con la expresión (2.22), existen dos componentes a definir para la verificación, la resistencia a punzonamiento alrededor del perímetro crítico oportuno ($v_{Rd,c}$) y la tensión cortante de diseño debido a la carga puntual aplicada (v_{Ed}).

El perímetro crítico, necesario para calcular las tensiones resistentes y aplicadas, se define según lo presentado en la Figura 2.20.

Considerando una columna cuadrada (igual al caso que se investiga), el perímetro crítico puede calcularse como:

$$u_1 = 4 \cdot c + 2 \cdot \pi \cdot (2d) \quad (2.23)$$

Para el cálculo de las tensiones cortantes de diseño se define:

$$v_{Ed} = \beta \frac{V_{Ed}}{u_1 d} \quad (2.24)$$

$$\text{con } \beta = 1 + k \frac{M_{Ed}}{V_{Ed}} \frac{u_1}{W_1} \quad (2.25)$$

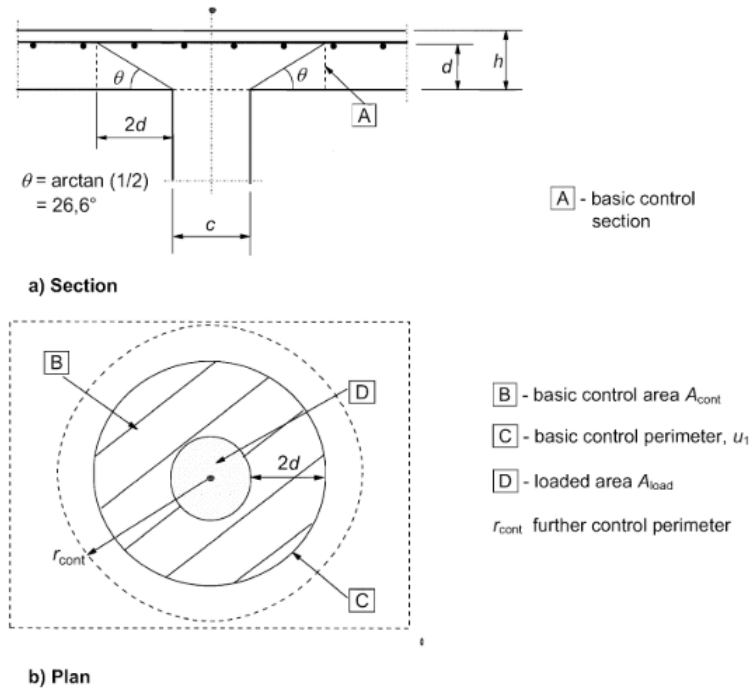


Figura 2.20: Definición del perímetro crítico (C).

Donde

V_{Ed} es la carga puntual o reacción sobre la losa

u_i es el perímetro crítico considerado

β es el parámetro que tiene en cuenta excentricidades en la carga V_{Ed}
(Punto 3-6 de la sección 6.4.3 del EC2)

Por otro lado, para el cálculo de la resistencia a cortante que presenta la losa, sin armadura de cortante, $v_{rd,c}$ se puede escribir como:

$$v_{Rd,c} = C_{Rd,c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} + k_1 \sigma_{cp} \geq v_{min} + k_1 \sigma_{cp} \quad (2.26)$$

$$v_{min} = 0,035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2} \quad (2.27)$$

Donde

f_{ck} es la resistencia característica en MPa

k es el parámetro que contempla el efecto tamaño, $k = 1 + \sqrt{200/d} \leq 2$ con d en mm

ρ_l es la cuantía geométrica ponderada entre direcciones ortogonales, $\rho_l = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 0,02$. ρ_x y ρ_y son las cuantías geométricas en cada una de las dos direcciones de armado, considerando un ancho eficaz de la losa de $b_{eff} = c + 6d$ ($3d$ por cada lado de la columna)

$C_{Rd,c}$ coeficiente igual a $0,18/\gamma_c$

k_1 coeficiente igual a 0.1

$\sigma_{cp} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ es la tensión en el plano de la losa promediada en ambas direcciones, tensiones a compresión positivas

2.2.2. ACI Standard - Building Code Requirements for Structural Concrete - ACI 318M-14

La norma americana ACI 318-14 define la resistencia a punzonamiento en losas bidireccionales a partir de la resistencia nominal a cortante. Para el caso sin armadura de cortante:

$$v_n = v_c \quad (2.28)$$

La resistencia a punzonamiento se define, de manera análoga al Eurocódigo 2, sobre una región crítica, definida a partir de la profundidad del hormigón, d y el perímetro crítico, b_0 .

En la norma americana, el valor del perímetro crítico se toma como un valor mínimo, pudiendo ser superior. Como valor mínimo, el perímetro no se puede situar más cercano que $d/2$ de los bordes de la columna, capiteles o ábacos. Para losas planas de canto constante y sin armadura de cortante basta con verificar el punzonamiento en una única sección (perímetro).

La resistencia nominal a cortante, según la ACI-318M se define como el mínimo de las expresiones (2.29) a (2.31).

$$v_c = 0,33\lambda\sqrt{f'_c} \quad (2.29)$$

$$v_c = 0,17 \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) \lambda\sqrt{f'_c} \quad (2.30)$$

$$v_c = 0,083 \left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_0} \right) \lambda\sqrt{f'_c} \quad (2.31)$$

Donde

f'_c es la resistencia a compresión del hormigón en MPa. Se limita su valor a

$$\sqrt{f'_c} \leq 8,3 \text{ MPa}$$

λ es el parámetro que tiene en consideración la densidad del hormigón

β es el ratio entre las longitudes mayor y menor de la superficie cargada

$$(\beta = a_n/b_n)$$

α_s es el parámetro que considera la posición de la columna, sea interior

($\alpha_s = 40$), perimetral ($\alpha_s = 30$) o en la esquina ($\alpha_s = 20$)

b_0 es el perímetro crítico

2.3. Resumen

En este capítulo, sobre la revisión del estado del arte, se han introducido los conceptos básicos y la fenomenología que definen la rotura por punzonamiento en losas planas de hormigón armado, conjuntamente con varios modelos y consideraciones sobre la influencia de parámetros como el efecto tamaño o la cantidad geométrica de armado.

Aunque la acción combinada del punzonamiento conjuntamente con tracciones aplicadas en el plano de la losa no son un caso de carga extraordinario, no existen investigaciones de relevancia sobre la influencia de las tracciones en la resistencia de losas planas a punzonamiento.

La rotura por punzonamiento se basa en el colapso de la región comprimida del hormigón, alrededor de la carga puntual o reacción (losa apoyada en columnas). Tras desarrollarse una fisura tangencial crítica hasta la zona comprimida del hormigón debido a la flexión de la losa, este se ve sometido a esfuerzos de compresión y cortante. Dicho estado es equivalente a un estado de compresiones y tracciones ortogonales que acaban en una rotura frágil, y por ende peligrosa.

Desde mediados del siglo pasado investigadores han estudiado en profundidad la mecánica que existe detrás de la rotura por punzonamiento, y ya desde la época, se han desarrollado normativas empíricas para asegurar que se evita el punzonamiento. Hoy en día, tal y como apuntan varios investigadores, varias formulaciones destinadas al diseño continúan siendo empíricas o semi-empíricas, conduciendo a resultados que en ocasiones pueden no ser adecuados o seguros. Una muestra es el resultado de las comparaciones tras el desastre de *Sampoong, Seul* [8], en el que se afirma una predicción débil del código americano ACI-318 para casos con baja cuantía geométrica de armadura.

Es por ello que recientemente, autores como *Marí et al.* [11] o *Muttoni* [14] han desarrollado formulaciones sencillas enfocadas al diseño y la aplicación normativa pero con un trasfondo mecánico racional.

A lo largo del trabajo expuesto, se utilizará la formulación presentada por *Marí et al.* sobre la resistencia última a punzonamiento con el objetivo de proporcionar una herramienta más de comparación a los resultados numéricos obtenidos.

De la literatura se desprende que, la rotura por punzonamiento, presenta un proceso de rotura similar a la que se da en vigas debido a fallo por cortante, donde la resistencia a cortante de la cabeza comprimida del hormigón juega un papel importante. En el caso de las losas planas, dado su desarrollo tridimensional, la pareja de momentos radiales y tangenciales ayudan al confinamiento del hormigón justo en la zona de la rotura. De ahí, que muchos autores consideren la resistencia confinada del hormigón para el cálculo del punzonamiento en modelos analíticos. Dicho incremento en la resistencia del hormigón permite a las losas incrementar la carga a punzonamiento.

Capítulo 3

Simulación numérica del punzonamiento en losas - Definición de un modelo numérico y análisis de sensibilidad

Uno de los objetivos principales de este trabajo es poder estudiar el comportamiento de losas sometidas a punzonamiento y tracciones contenidas en el plano. Por ello, es necesario presentar un modelo de elementos finitos que reproduzca la rotura investigada de manera fidedigna. De esta manera, también se cumplirá con el objetivo de dar soporte a la ya mencionada campaña experimental que se está desarrollando paralelamente en la Universidad Politécnica de Catalunya, para el ensayo de losas sometidas a punzonamiento y tracciones contenidas en el plano.

Por desgracia, dicha campaña no se ha podido iniciar, por ello, en este trabajo no se podrán incluir, en ninguno de los capítulos, resultados experimentales que respalden completamente los modelos propuestos.

Para llevar a cabo dichas simulaciones numéricas se ha utilizado el paquete comercial ABAQUS 6.14, el cual es capaz de incorporar gran variedad de situaciones y configuraciones geométricas y materiales, permitiendo así simular el comportamiento no-lineal del hormigón y acero.

Este capítulo se centra, pues, en la definición de un modelo capaz de simular el punzonamiento en una losa simplemente apoyada, y a su vez, capaz de expandirse con nuevas condiciones de carga, como las tracciones en el plano.

El capítulo se estructura en tres partes diferenciadas, una primera par-

te en la que se introducen algunos aspectos básicos de la formulación de elementos finitos y distintos procedimientos, razonando así las elecciones realizadas.

A continuación, se presenta la definición del modelo material utilizado, partiendo de los modelos ofrecidos en ABAQUS. Se define también todas las características del modelo definido, para que este sea fácilmente reproducido por el lector.

Finalmente se presentan los primeros resultados numéricos, comparados con las predicciones del modelo de referencia (*Marí et al.* [11]). También se presenta un análisis de sensibilidad, pese que este solamente pueda ser completado con ensayos de laboratorio pendientes.

3.1. Introducción a los elementos finitos

El método de elementos finitos (MEF o FEM del inglés *Finite Element Method*) es una herramienta numérica que permite la resolución de problemas físicos mediante la discretización de una geometría, la cual tiene un comportamiento (ella misma o alguna de sus propiedades) que se puede describir mediante ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno, por ejemplo, flujos de calor, aplicación de esfuerzos-deformaciones, flujos de masa y/o fluidos, etc.

Mediante el MEF es posible, a partir de una ecuación diferencial parcial (EDP) expresada en forma fuerte, y que se puede reescribir en una forma débil, transformar la forma débil en un funcional (velocidades, desplazamientos, etc.) en función de las coordenadas discretas (nodos). Dicha discretización, de manera genérica, a su vez se traduce en una expresión matemática de tipo matricial:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

Siendo \mathbf{K} la matriz que relaciona a los nodos, los cuales bajo unas fuerzas aplicadas \mathbf{f} tienen una respuesta \mathbf{u} [28]. De esta manera, es posible resolver un problema de contorno mediante un sistema de ecuaciones.

ABAQUS, al igual que muchos otros paquetes de simulación numérica, permite simular distintos fenómenos físicos, dependiendo de las condiciones en las que el problema se da, ya sea una simulación estática ($\ddot{u} = 0$), simulaciones dinámicas ($\ddot{u} \neq 0$), problemas de valores principales y mucho más, ajustando así la formulación a utilizar.

Si se centra la atención en los problemas de tipo estructural, estos se pueden clasificar como estáticos o casi-estáticos, conduciendo a los códigos *implícito* y *explícito* que tiene el programa para solucionarlos.

El paquete de cálculo *ABAQUS/Implicit* se basa en el hecho que existe equilibrio estático durante todo el proceso de simulación, algo que es cierto con gran frecuencia en estructuras, incluso en el punzonamiento, siendo así un proceso independiente del tiempo. Una vez discretizada la ecuación diferencial, para el caso estático, esta presenta una forma del tipo

$$\mathbf{K}^t \cdot \mathbf{u}^t = \mathbf{F}^t \quad (3.1)$$

De la Ec.(3.1), el superíndice t expresa la dependencia “temporal”/espacial de sus constituyentes, es decir, la no-linealidad de estos debido a distintas razones, como la no-linealidad de los materiales, la evolución de las deformaciones a lo largo de la simulación (a lo largo del tiempo), etc.

Uno de los puntos fuertes del cálculo implícito en el MEF es la robustez de este a lo largo de la simulación, dado que en cada incremento de tiempo se impone el equilibrio de fuerzas (condición básica dado que se establece un escenario estático).

A su vez, dicha propiedad tiene una contrapartida. Dado que se ha de asegurar el equilibrio, se establece un proceso iterativo por el que se verifica la condición de $\ddot{u} = 0$. En el presente, el método iterativo más común es el de Newton-Raphson, método por omisión en *ABAQUS/Implicit*.

El proceso iterativo necesario (es necesario buscar una matriz de rigidez tangencial durante el proceso iterativo) conjuntamente con el proceso de inversión de la matriz de rigidez \mathbf{K}^t , que puede llegar a ser pesada, hacen de este método una opción robusta y con resultados precisos pero, a su vez, muy lenta [28].

Por otro lado, el paquete de cálculo *ABAQUS/Explicit*, propio de simulaciones dinámicas o con colisiones, opera de manera distinta. El motor de cálculo explícito se basa en un proceso temporalmente dependiente (estáticamente dinámico), y por ello la masa (inercia) no se puede despreciar. En este caso, la ecuación matricial que gobierna el problema físico es:

$$\mathbf{M}^t \cdot \ddot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{C}^t \cdot \dot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{K}^t \cdot \mathbf{u}^t = \mathbf{F}^t \quad (3.2)$$

Donde se puede apreciar la dependencia temporal de la simulación mediante $\ddot{\mathbf{u}}$. Por otro lado, la incorporación del amortiguamiento en la Ec.(3.2) permite minimizar problemas con la inercia y paralelamente reducir el tiempo de cálculo.

En comparación con los procedimientos implícitos, el cálculo para la resolución de la Ec.(3.2) es normalmente mucho más sencillo y, por ende, puede llegar a ser drásticamente más rápido.

Esto se debe principalmente al hecho que la ecuación presentada puede resolverse mediante procedimientos explícitos de integración en el tiempo, como el de diferencias centrales. Además, la matriz de masa \mathbf{M}^t normalmente es diagonalizable, siendo la inversión de la nueva matriz trivial.

Adicionalmente, los esquemas de computo explícitos no verifican el equilibrio en cada incremento de tiempo (dado que en dichos problemas no suele ser requerido) y por ello no es necesario ningún proceso iterativo. Este hecho, conjuntamente con la necesidad de no invertir complejas matrices de rigidez (\mathbf{K}^t) hacen de este método un proceso de simulación muy rápido.

Al igual que en los cálculos implícitos, existen ciertas contrapartidas. En procedimientos explícitos, dado que no se verifica el equilibrio, pueden aparecer problemas durante la simulación que conducen a resultados no coherentes u oscilantes. La estabilidad del procedimiento es condicional y esta regulada por la definición del incremento de tiempo (Δt), que en el caso de ABAQUS se puede ajustar para que se regule automáticamente.

Cabe destacar que, aunque el cálculo explícito no parezca apropiado para simulaciones estáticas, sí es capaz de reproducir simulaciones cuasi-estáticas, siempre teniendo presentes ciertas consideraciones.

Escalado de masa (*mass scaling*): Permite modificar la dependencia temporal, dado que en simulaciones cuasi-estáticas el tiempo no debería ser un factor, mediante el escalado artificial de la masa del modelo y así reducir el periodo del análisis sin afectar en gran medida los resultados obtenidos [29].

Tiempo de análisis : Dado que se está trabajando con un modelo dinámico explícito, el tiempo de análisis es realmente corto (1-2s) como máximo.

Verificación de la energía cinemática: Tras realizar la simulación, es importante verificar que, a lo largo de este, la energía cinética se ha mantenido, aproximadamente, por debajo del 5 % de la energía interna.

Aplicación de cargas: La aplicación de una carga no puede ser creciente lineal durante el paso, sino que se ha de aplicar de manera *suavizada* con incrementos muy bajos al inicio y final.

Así pues, existen dos alternativas de cálculo a considerar para la simulación estructural, donde el objetivo es obtener tensiones-deformaciones, desplazamientos y reacciones.

3.2. Definición de la simulación

Para poder cumplir con la metodología establecida, de simular el punzonamiento en losas de hormigón bajo distintas configuraciones, es necesario establecer un modelo capaz de reproducir el comportamiento del hormigón armado, tanto en régimen lineal como no-lineal.

Tal y como se ha mencionado anteriormente, para poder realizar los análisis correspondientes (para este capítulo y el siguiente) se utilizará principalmente el paquete comercial de cálculo ABAQUS, conjuntamente con herramientas/lenguajes como PYTHON, EXCEL y CATIA.

A grandes rasgos, el flujo de trabajo adoptado para generar un modelo capaz de reproducir el comportamiento de la losa de estudio pasa por:

1. Definición preliminar de la geometría de la losa y propiedades básicas
2. Reproducción de la geometría (incluyendo armaduras y apoyos) digitalmente mediante CAD 3D, usando CATIA v5
3. Definición específica de los materiales y propiedades mecánicas, mediante formulación propuesta en las normativas *EHE-08*, *EC2* y *Model Code 2010*
4. Configuración parcial del modelo a simular mediante ABAQUS/CAE (interfaz gráfica)
5. Configuración final del modelo mediante código (python), para así poder realizar análisis paramétricos y de sensibilidad

3.2.1. Definición inicial de la losa

La geometría de la losa definida para los análisis numéricos sigue las indicaciones de los autores de los ensayos experimentales, *Antonio Marí Bernat, Eva Oller Ibars y Pablo Gonzalo Fernández (UPC)*, dado que los resultados numéricos han de dar soporte previo y comparativo a dichos ensayos. A su vez, los autores de los ensayos proponen unas dimensiones de partida similares a las dimensiones propuestas por *Adetifa y Polak* en [30] (para así tener una referencia comparativa), aunque con ciertas modificaciones para poder cumplir con las nuevas condiciones de tracción introducidas.

La losa propuesta tiene unas dimensiones totales de 1650x1650mm, de las cuales se considera una luz libre de 1500x1500mm, y un espesor de 120mm. Los apoyos, para contrarrestar la fuerza vertical ejercida por el actuador, toman los vértices de un octógono y tienen una forma circular de $\varnothing 100$ mm. Por otro lado, la carga aplicada para producir el punzonamiento está situada en el centro geométrico de la losa, en una superficie de 150x150mm, y

dirección descendente (considerando la Figura 3.1).

Las tracciones aplicadas sobre el plano de la losa se aplican en una sola dirección mediante placas de acero unidas a barras tipo *Dywidag*, traccionadas desde un marco auxiliar formado por perfiles de acero tipo I. Estas tracciones se comentarán con detalle en el Capítulo 4

La armadura se dispone en forma de malla con redondos de $\varnothing 12\text{mm}$ de manera distinta en direcciones ortogonales, siendo la dirección traccionada la que contiene mayor densidad de armado. Distinguiendo 4 zonas/tipos de armado¹:

1. Paramento traccionado/comprimido - Dirección traccionada: 32 redondos $\varnothing 12\text{mm}$ (16 por paramento) dispuestos con un espaciado de 110mm entre barras internas y 70mm con las barras exteriores.
2. Paramento traccionado - Dirección no traccionada: 16 redondos $\varnothing 12\text{mm}$ con un espaciado tipo de 90mm.
3. Paramento comprimido - Dirección no traccionada: 11 redondos $\varnothing 12\text{mm}$ con un espaciado tipo de 115mm y 200mm.
4. Barras auxiliares: Redondos de $\varnothing 10\text{mm}$ dispuestos en parejas en las cercanías de las placas de acero (que introducen las tracciones) y en la dirección no traccionada.

La Figura 3.1 muestra, de manera esquemática la losa propuesta sobre la que analizar el punzonamiento.

En el Apéndice-A se presentan planos de detalle sobre las dimensiones de la losa, la configuración y dimensiones de la armadura y la posición relativa de los apoyos sobre la losa.

En lo que concierne a los materiales, los ensayos experimentales están propuestos con hormigón HA-35 y acero para armadura pasiva B500. En la Sección 3.2.2 se desarrolla toda la información necesaria para conducir las simulaciones a partir de los materiales sugeridos.

La verificación de los elementos resistentes de la losa propuesta se presentan en el Apéndice-B, presentando alguno de los resultados en la Sección 3.3.2 para facilitar la comparación entre resultados numéricos y normativos.

3.2.2. Definición de las propiedades materiales

Uno de los procesos clave para obtener buenos resultados numéricos reside en la definición del material, entiendo esta como el conjunto de paráme-

¹Espaciado tipo medido entre centro de barras

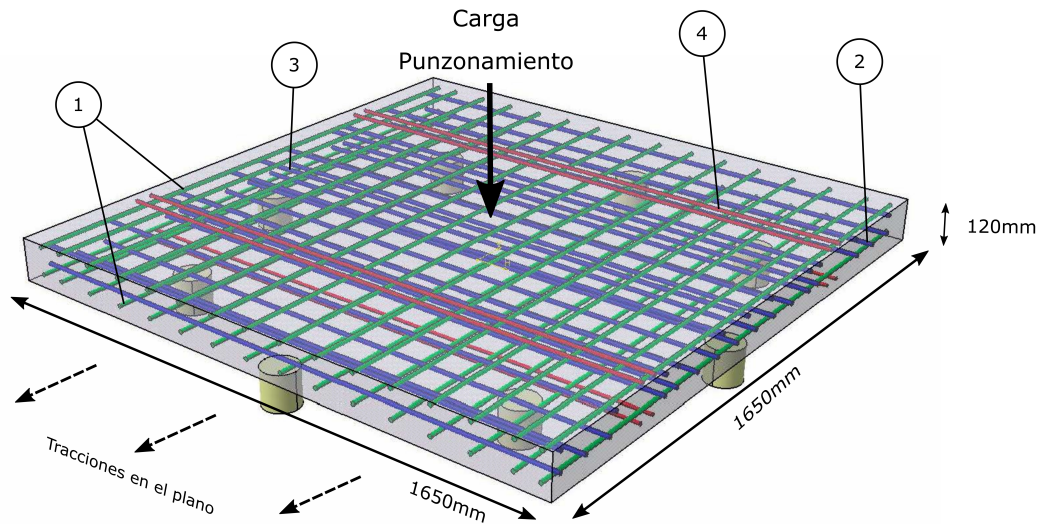


Figura 3.1: Disposición de la losa, con las distintas armaduras y apoyos (dibujados como superficies rígidas). La numeración corresponde a la lista anterior con 4 tipologías de armado

tros y leyes constitutivas adecuados para la reproducción de los fenómenos no-lineales, especialmente para casos como el hormigón armado, el cual presenta un comportamiento frágil según que circunstancias.

Para poder capturar el comportamiento no-lineal en el modelo presentado se procederá mediante la definición de las propiedades mecánicas del hormigón, por un lado, y del acero por otro, utilizando modelos materiales estándar de ABAQUS. Más específicamente, el modelo *Concrete Damaged Plasticity Model* para reproducir el hormigón y un modelo elástico-plástico basado en plasticidad perfecta (plastificación regida por el criterio de Von Mises) para simular el comportamiento del acero.

Cada uno de los modelos se define a partir de las propiedades físicas básicas de cada uno de los materiales, tal como la resistencia a compresión uniaxial, deformaciones últimas, módulo de Young y poisson, etc. A partir de estas, y utilizando las ecuaciones propuestas en cada modelo material, se puede llegar a unas leyes constitutivas que permiten reproducir la respuesta que se espera del material en el mundo real.

Cabe destacar, más allá de qué material se está simulando, que, la definición de los parámetros a introducir depende del tipo de simulación que se

desea. Es decir, para reproducir numéricamente un fenómeno ya sucedido, es muy recomendable utilizar las características materiales específicas de la situación a reproducir.

Por otro lado, si se desea simular un evento todavía por suceder (como en diseño) es importante considerar *valores medios* del material sin considerar ningún coeficiente de seguridad (propuestos en las normativas), tal y como exponen *Broo et al.* en [31]. De esta manera se evitan simulaciones donde dichos parámetros conducen a respuestas magnificadas (por encima o debajo del resultado) o donde no se captura en absoluto la hipotética realidad.

Definición del hormigón

ABAQUS ofrece tres modelos capaces de simular parcial o completamente el comportamiento del hormigón, de los cuales dos reproducen las capacidades post-elásticas tanto a compresión como a tracción de este. Dichos modelos, que ofrece el programa de manera estándar, son el *Concrete Smeared Cracking* y el *Concrete Damaged Plasticity Model* de los cuales solamente el segundo funciona con los motores de cálculo explícito e implícito.

Tal y como se presenta en [29], ambos modelos pueden predecir de manera satisfactoria casos de carga monolítica, con hormigón armado y con casos de bajo confinamiento (alejados de casos triaxiales). Adicionalmente, el modelo *Concrete Damaged Plasticity* es capaz de reproducir casos de carga cíclicos y reversibles.

Aun así, siguiendo la literatura [32-34], se puede observar que el modelo *Concrete Damaged Plasticity* es preferido sobre el otro. Por ello, y considerando que los parámetros de dicho modelo están al alcance, se ha decidido proceder con este.

De acuerdo con [29], el *Concrete Damaged Plasticity Model* es un modelo plástico en el continuo para modelar el hormigón. En este se asumen dos principales mecanismos de rotura, fisuración (debido a tracciones) y aplastamiento (debido a compresiones). La evolución de la superficie de fluencia esta controlada por las variables de endurecimiento a tracción y compresión ($\tilde{\varepsilon}_t^{pl}, \tilde{\varepsilon}_c^{pl}$), vinculadas a sus respectivos mecanismos de rotura.

Para contemplar la evolución de la resistencia que tiene el hormigón a tracción y a compresión, el modelo utiliza la función de fluencia propuesta por *Lubliner et al.* [35] y modificada por *Lee y Fenves* [36].

La formulación de la que parte el modelo está recogida en la Sección 23.6.3 de [29] y Sección 4.5.2 de [37], las cuales se recomienda revisar.

El modelo presentado se define en ABAQUS mediante cuatro familias de datos

1. Parámetros elásticos del hormigón

2. Familia de parámetros que definen la función de fluencia
3. Relación plástica tensión-deformación bajo compresión
4. Relación plástica tensión-deformación bajo tracción

Para definirlos se partirá de las características del material (Hormigón HA-35) conjuntamente con parámetros derivados de distintas normativas, así como parámetros recomendados en la literatura ([33]).

Parámetro de partida
$f_{cm} = 43 \text{ MPa}$

Parámetros de la función de fluencia: Para poder definir parte del modelo *Concrete Damaged Plasticity* es necesario especificar los parámetros que definen la función de fluencia (siguiendo lo establecido en [29]).

Los parámetros utilizados son:

$\psi = 40^\circ$: Ángulo de dilatancia

$\epsilon = 0,1$: Excentricidad definida en la función de fluencia

$f_{b0}/f_{c0} = 1,16$: Ratio de tensiones

$K_c = 0,667$: Factor de forma de la superficie de fluencia

$\eta = 1 \cdot 10^{-6}$: Viscosidad, ayuda a la convergencia del cálculo (solo considerado durante el cálculo implícito)

El valor de dichos parámetros se ha obtenido a partir de las simulaciones realizadas por *Genikomsou y Polak* en [33] y de las recomendaciones (o valores preestablecidos) del propio programa, explicadas en [29].

Parámetros elásticos y relación compresión-deformación: Dado el comportamiento lineal/no-lineal del hormigón bajo los efectos de tensiones menores a la tensión máxima (f_{cm}), parece interesante definir bajo un mismo grupo dos tipos de parámetros necesarios para ABAQUS, los elásticos y los plásticos.

Siguiendo las indicaciones de la *EHE-08*, *Model Code 2010* y *Genikomsou y Polak* en [33], puede asumirse el comportamiento del hormigón como elástico lineal bajo tensiones de compresión (uniaxiales) $\sigma_c \leq 0,4f_{cm}$ y no-lineal bajo tensiones superiores.

Por otro lado, interpretando cómo la información material se introduce en ABAQUS, este requiere de un módulo elástico y de Poisson para la **caracterización elástica** y una relación *compresión-deformación inelástica*

(tabular) para la **caracterización plástica**, donde es importante subrayar el hecho de utilizar *deformaciones inelásticas* (Ec.(3.3)). De esta ecuación cabe destacar que la tensión sobre la que se evalúa ε_{0c}^{el} es la correspondiente al la deformación ε_c y no a la deformación que marca el límite elástico.

$$\tilde{\varepsilon}_c^{in} = \varepsilon_c - \varepsilon_{0c}^{el} \quad \text{con} \quad \varepsilon_{0c}^{el} = \sigma_c(\varepsilon_c)/E_0 \quad (3.3)$$

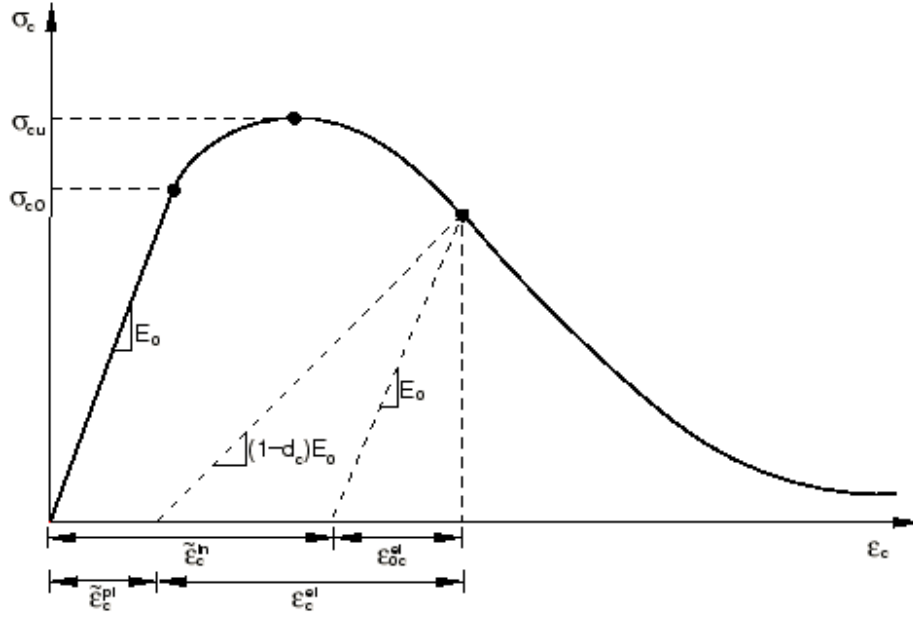


Figura 3.2: Relación constitutiva esperada por el programa ABAQUS para la compresión uniaxial del hormigón [29].

Ello significa que ABAQUS, un vez llegados a la tensión elástica límite, marcada por el inicio del comportamiento plástico, las deformaciones post-elásticas se acumulan a las deformaciones ya obtenidas (elásticas mediante la relación lineal de tensión-deformación). Un error en la definición del módulo elástico podría conllevar a una sobre/infra-valoración de las deformaciones finales de la relación tensión-deformación. Este concepto se expone en la Figura 3.3, donde se aprecia el comportamiento esperado (negro) frente desviaciones a causa de una mala definición del módulo elástico.

Agrupando las dos ideas anteriores y considerando cómo se formula la Ec.(3.3), puede concluirse que es importante asegurar la continuidad (de tipo C0) sobre las curvas elástica y plástica que definen la relación tensión-deformación, sobre el punto donde se inician las deformaciones inelásticas. Por ello, se definirá primero el tipo de relación tensión-deformación (de manera global), para posteriormente definir el módulo elástico necesario para mantener la continuidad mencionada, mediante la imposición del binomio

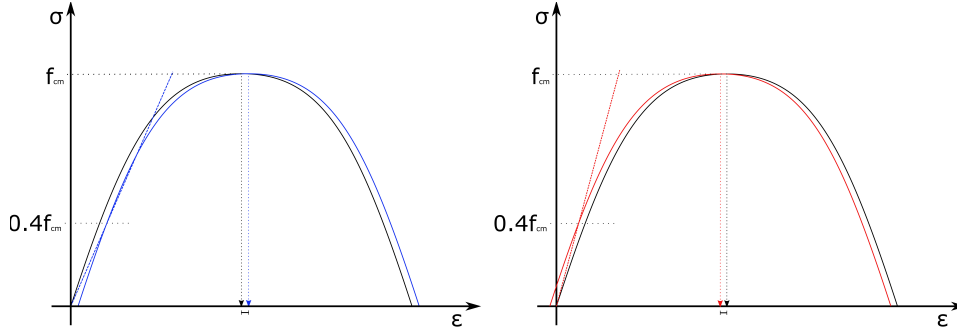


Figura 3.3: Comparativa de relaciones constitutivas (a partir de la parábola de Hognestad. La curva *negra* es relación sin modificar, las curvas azul y roja, han sido desplazadas a causa de la mala predicción en las deformaciones elásticas, a causa de la desviación del módulo elástico

tensión-deformación sobre la tensión deseada.

Siguiendo las propuestas de la *EHE-08* y *Genikomsou y Polak* [33], la relación tensión-deformación (compresión uniaxial) para caracterizar el comportamiento del hormigón es la *Parábola de Hognestad*, con expresión:

$$\sigma_c = f_{cm} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right] \quad \text{si } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \quad (3.4)$$

Donde

ε_{c0} es la deformación bajo máximas compresiones, con valor 0.002

ε_{cu} es la deformación última, con valor 0.0035

Una vez definida la relación tensión-deformación, se puede definir la rama elástica, necesaria para el cálculo en ABAQUS, siguiendo la mencionada recomendación de $\sigma_c \leq 0,4f_{cm}$.

A diferencia de cómo se define el módulo de elasticidad en los distintos códigos (i.e $E_{cm} = 8500 \sqrt[3]{f_{cm}}$ de la *EHE-08*), para este trabajo se propone un módulo capaz de permitir la continuidad necesaria entre la rama lineal (elástica) y la rama no-lineal, mencionada con anterioridad. Por ello, se ha de obtener la deformación asociada a la tensión de $0,4f_{cm}$ a partir de la Ec.(3.4), aislando la deformación se obtiene:

$$\varepsilon_{0,4} = \varepsilon_{c0} \left(1 - \sqrt{1 - 0,4} \right) \quad (3.5)$$

Una vez conocida la deformación $\varepsilon_{0,4}$, la obtención del módulo de elasticidad es directa:

$$E_{0,4} = \frac{\sigma_{0,4}}{\varepsilon_{0,4}} = \frac{0,4 \cdot 43}{4,50806 \cdot 10^{-4}} = 38153,82 \text{ MPa} \quad (3.6)$$

Dicho módulo elástico asegura:

- Comportamiento lineal cuando $\sigma_c \leq 0,4f_{cm}$
- Continuidad entre la curva lineal y la curva parabólica justo en el punto $(0,4f_{cm}, \varepsilon_{0,4})$. Eso implica que la parábola no se desplazará a causa de deformaciones elásticas incorrectas

Adicionalmente, para definir las propiedades elásticas en ABAQUS se ha de definir el coeficiente de Poisson, el cual se toma como $\nu = 0,2$, tal y como recomienda la *EHE-08*.

Para la definición de la rama no-lineal se utiliza la expresión ya expuesta en la Ec.(3.4) pero con ciertas consideraciones especiales.

Por un lado, la curva tensión deformación se toma a partir del valor tensional de $\sigma_c = 0,4f_{cm}$, para así respetar el previo comportamiento elástico.

Por otro lado, dado que el comportamiento no-lineal se define en ABAQUS a partir de las deformaciones inelásticas, ha de realizarse un cambio en el eje de ordenadas sobre la parábola inicial, para así tener una nueva relación *compresión-deformación inelástica* en lugar de compresión-deformación. La deformación inelástica inicial tiene valor $\tilde{\varepsilon}_{c,inicial}^{in} = 0$

Recapitulando, la relación tensión-deformación se puede escribir como:

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = \begin{cases} E_{0,4} \cdot \varepsilon_c & \text{si } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{0,4} \\ f_{cm} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right] & \text{si } \varepsilon_c \geq \varepsilon_{0,4} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$a = \tilde{\varepsilon}_c^{in} + \frac{\sigma_c(\varepsilon_c)}{E_{0,4}} \leq \varepsilon_{cu} \quad (3.8)$$

Finalmente, las Figuras 3.4a y 3.4b exponen gráficamente la relación tensión-deformación completa y la relación tensión-deformación inelástica. Cabe destacar que la curva no-lineal (Figura 3.4b) solamente puede introducirse de manera tabular en el programa, por ello es necesario obtener la relación discretizada a partir de la expresión (3.7) .

Relación tracción-deformación: Al igual que sucede con el comportamiento a compresión, presentado en el punto anterior, el hormigón sometido a tracciones uniaxiales también tiene un comportamiento no-lineal.

Para la definición del comportamiento del hormigón bajo tensiones de tracción uniaxiales se recurre al modelo expuesto en el *Model Code 2010*, el

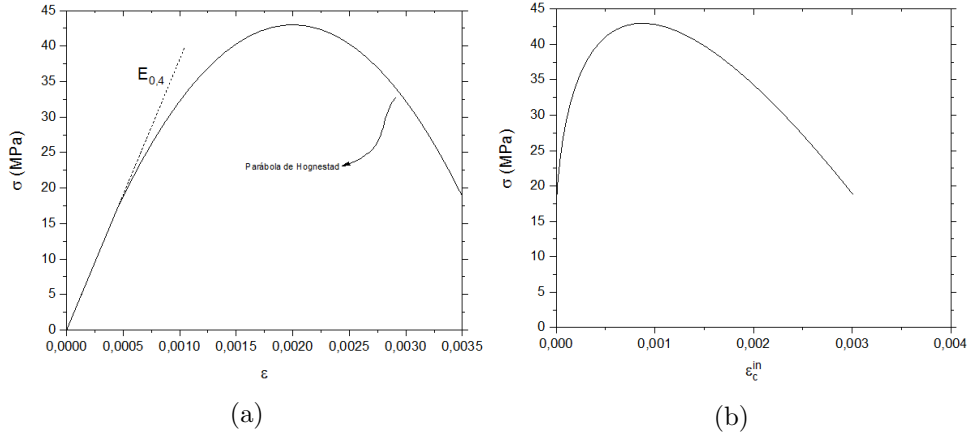


Figura 3.4: Relaciones compresión uniaxial-deformación (3.4a) y curva introducida en ABAQUS para la rama post-elástica, considerando deformaciones únicamente inelásticas (3.4b)

cual separa la respuesta del hormigón en función de si este está o no fisurado, considerando una relación tensión-deformación y otra tensión-abertura de fisura, respectivamente.

Según el modelo propuesto en [6], para el régimen elástico, el hormigón se caracteriza mediante el módulo de Young (definido en el punto anterior) utilizando así una relación tensión-deformación lineal, hasta un nivel de tensión $\sigma_{ct} \leq 0,9f_{ctm}$. Para cargas contenidas entre $0,9f_{ctm} \leq \sigma_{ct} \leq f_{ctm}$ el hormigón empieza a padecer los efectos de la microfisuración, conduciendo a un relajamiento de su rigidez pero aún estado definido por las deformaciones.

Tras alcanzar la tensión máxima f_{ctm} , calculada como:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (3.9)$$

asociada a una deformación $\epsilon_{ct} = 0,15\%$, la microfisuración ha crecido suficiente como para formar fisuras discretas. A partir de este punto, el modelo propone una relación tensión-abertura de fisura ($\sigma - w$), donde w es una abertura de fisura ficticia, para reproducir la rama de reblandecimiento (debido a la fisuración).

Existen distintas propuestas para definir la relación $\sigma - w$ (lineal, bi-lineal, exponencial), tal y como indican Genikomsou y Polak en [33]. El modelo propuesto por el *fib* cuenta con una relación bilineal, donde el área subtendida de la misma es la energía de fractura, G_f , definida como presenta la Ec.(3.10) y presentada en la referencia [25].

$$G_f = 0,028 \cdot f_{cm}^{0,18} \cdot d_{max}^{0,32} \text{ N/mm} \quad (3.10)$$

Donde

d_{max} es el tamaño máximo de árido, tomado como 10 mm para este trabajo

La Figura 3.5 y las expresiones (3.11) y (3.12) formulan la relación tracción-abertura de fisura bi-lineal utilizada para reproducir la tracción uniaxial, las cuales están en función de la resistencia a tracción y la energía de fractura.

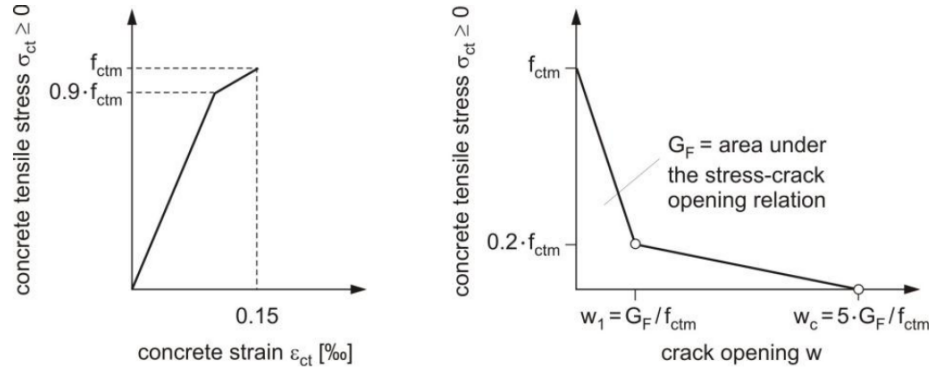


Figura 3.5: Relación tensión-deformación y tensión-abertura de fisura del modelo propuesto por *Model Code 2010* [6]

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} \left(1 - 0,8 \frac{w}{w_1} \right) \quad \text{para } w \leq w_1 \quad (3.11)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} \left(0,25 - 0,05 \frac{w}{w_1} \right) \quad \text{para } w_1 \leq w \leq w_2 \quad (3.12)$$

Donde

$w_1 = G_f / f_{ctm}$ abertura de fisura asociada a $0,2 f_{ctm}$ en mm

$w_2 = 5 G_f / f_{ctm}$ abertura de fisura última ($\sigma_{ct} = 0$) en mm

Considerando que el modelo asumido para tracciones uniaxiales se ha de introducir en ABAQUS, tal y como se ha procedido para el caso de compresiones, la relación tensión-deformación se define en dos ramas, elástica y post-elástica, con la transición entre ellas situada en el punto bajo tracciones $\sigma_{ct} = 0,9 f_{ctm}$.

A diferencia del caso anterior (compresión), no es necesario asegurar la continuidad entre las ramas elástica y post-elástica, dado que dicha propiedad es inherente en la definición del modelo (Figura 3.5).

Tal y como se ha mencionado anteriormente, la rama elástica se define únicamente con el módulo de Young (Ec.(3.6)) y el coeficiente de Poisson,

definidos en el punto anterior. Dicho comportamiento elástico comprende tensiones comprendidas entre $0 \leq \sigma_{ct} \leq 0,9f_{ctm}$.

La rama post-elástica se inicia una vez superada la tensión de tracción de $\sigma_{ct} = 0,9f_{ctm}$ y, a diferencia de las compresiones, se define en dos tramos, dado el trato distintivo que propone el modelo usado (*Model Code 2010*) en función de si se sobrepasa o no el estado límite de deformaciones $\varepsilon_{ct,max} = 0,15\%$.

Pese trabajar con dos tramos distintos, en toda la rama post-elástica se trabajará con *deformaciones de fisuración* ($\tilde{\varepsilon}_t^{ck}$), similares a las ya definidas deformaciones inelásticas. Se utiliza la relación tensión-deformación dado que, según se recomienda en [29] y al igual que proceden *Genikomsou y Polak* en [33], para reproducir hormigón armado la relación tensión-deformación es la preferida frente tensión-abertura de fisura (también disponible en ABAQUS).

La primera parte de la rama post-elástica se define por un tramo recto con origen en $\sigma_{ct} = 0,9f_{ctm}$ y final $\sigma_{ct} = f_{ctm}$, tal y como indica la Figura 3.5. Para este tramo, dado que esta definido bajo deformaciones, el único requerimiento es la transformación de estas a deformaciones de fisuración. Ello se puede hacer mediante la definición expuesta en la Ec.(3.3) pero substituyendo $\tilde{\varepsilon}_c^{in}$ por $\tilde{\varepsilon}_t^{ck}$. Como resultado se obtendría que la deformación asociada a la tensión $\sigma_{ct} = 0,9f_{ctm}$ es $\tilde{\varepsilon}_{t, inicial}^{ck} = 0$.

La segunda parte de la rama post-elástica se define, según el *Model Code 2010*, mediante una relación tensión-abertura de fisura. Para poder traducir dicha abertura en deformación inelástica es necesario realizar un cálculo adicional. Tal y como muestran *Genikomsou y Polak* en [33], la conversión de dicha abertura de fisura puede hacerse mediante la expresión (3.13), la cual depende de la longitud característica l_c . La longitud característica se define como la dimensión media de un elemento finito, siendo aproximadamente la arista en un elemento cúbico.

$$\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{ct,max} + \frac{w}{l_c} \quad \text{con} \quad \varepsilon_{ct,max} = 0,15\% \leq \varepsilon_{ct} \quad (3.13)$$

Finalmente, es necesario transformar las deformaciones definidas a partir de la abertura de fisura (Ec.(3.13)) en deformaciones de fisuración. Por ello, se sustrae la deformación elástica correspondiente a la tensión asociada al punto de la curva tensión-deformación que se está analizando sobre la deformación total. Así pues, la expresión (3.13) se deriva en:

$$\tilde{\varepsilon}_t^{ck} = \left(\varepsilon_{ct,max} - \frac{\sigma_t(\varepsilon_{ct})}{E_{0,4}} \right) + \frac{w}{l_c} \quad (3.14)$$

Cabe mencionar, de la expresión anterior, que la deformación inelástica obtenida nunca será igual o menor que cero, dado que, aunque $w = 0$, ya se tiene cierta deformación inelástica acumulada del primer tramo post-elástico, definido entre $0,9f_{ctm} \leq \sigma_{ct} \leq f_{ctm}$.

Las expresiones contenidas en (3.15) y (3.16), conjuntamente con la Figura 3.6a y 3.6b recapitulan el comportamiento del hormigón a tracción uniaxial, necesario para definir dicha propiedad en ABAQUS.

$$\sigma_{ct}(\varepsilon) = \begin{cases} E_{0,4} \cdot \varepsilon_{ct} & \text{si } \sigma_{ct} \leq 0,9f_{ctm} \\ f_{ctm} \left(0,9 - 0,1 \frac{\tilde{\varepsilon}_{ct}^{ck}}{\varepsilon_{ct,max} - \varepsilon_{0,9}} \right) & \text{si } \tilde{\varepsilon}_{ct}^{ck} \leq \varepsilon_{ct,max} - \varepsilon_{0,9} \\ f_{ctm} \left(1 - 0,8 \cdot \frac{a \cdot f_{ctm}}{G_F} \right) & \text{si } a \leq G_F/f_{ctm} \quad \& \quad \varepsilon_{ct} \geq \varepsilon_{ct,max} \\ f_{ctm} \left(0,25 - 0,05 \cdot \frac{a \cdot f_{ctm}}{G_F} \right) & \text{si } G_F/f_{ctm} \leq a \leq 5 \cdot G_F/f_{ctm} \end{cases} \quad (3.15)$$

$$a(\tilde{\varepsilon}_{ct}^{ck}) = \left[\tilde{\varepsilon}_{ct}^{ck} - \left(\varepsilon_{ct,max} - \frac{\sigma_t(\varepsilon_{ct})}{E_{0,4}} \right) \right] \cdot l_c \quad (3.16)$$

Donde

$E_{0,4}$ es el módulo de elasticidad definido en la Ec.(3.6)

$\varepsilon_{0,9}$ es la deformación asociada a una tensión $\sigma_{ct} = 0,9f_{ctm}$

$\varepsilon_{ct,max}$ es la deformación máxima, asociada a una tensión $\sigma_{ct} = f_{ctm}$

a es abertura de fisura, en función de la deformación inelástica. En mm

G_F es la energía de fractura (en N/mm) definida en la Ec.(3.10)

Definición del Acero

Tal y como se ha introducido anteriormente, la modelización del acero, que compone las armaduras dispuestas en la losa, se basa en un modelo elástico-plástico, donde el comportamiento plástico se rige por el criterio de plastificación isotrópica definida a partir de la superficie de fluencia de *Von Mises*.

Así pues, la definición del acero se simplifica drásticamente en comparación con el hormigón, puesto que solamente es necesario establecer la rama elástica y la tensión uniaxial a partir de la cual el acero plastifica. ABAQUS utilizará dichas definiciones para formular el modelo elástico-plástico.

La rama plástica del acero se define, en aras de simplicidad, mediante plasticidad perfecta (Figura 3.7), en la que el acero no presenta ningún tipo de endurecimiento o reblandecimiento al incrementar la deformación. Dicha

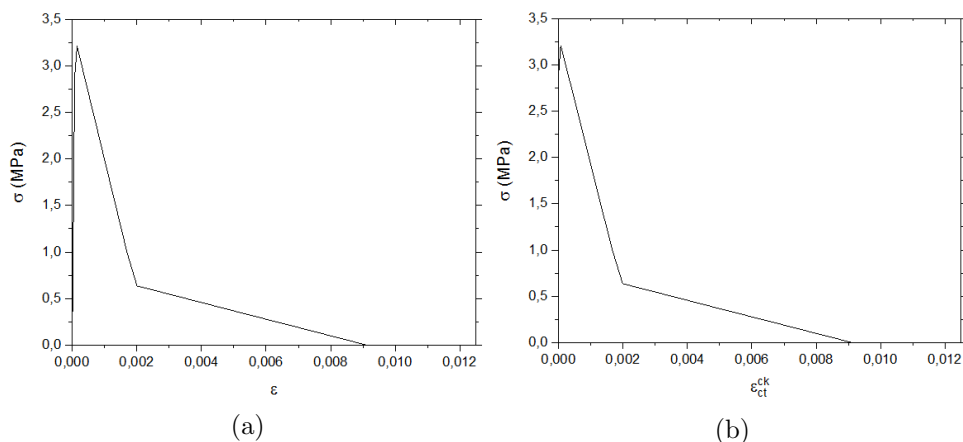


Figura 3.6: Relaciones tracción uniaxial-deformación (3.6a) y curva introducida en ABAQUS para la rama post-elástica, considerando deformaciones únicamente inelásticas (3.6b)

plasticidad se define de manera tabular en modelo mediante el binomio *tensión-deformación plástica*.

Los parámetros necesarios para definir el acero se centran pues en las características elásticas y el valor de la tensión a partir de la cual el acero empieza a plastificar.

Considerando barras de acero corrugadas B500, los parámetros a introducir son:

Parámetros
$E_a=200,000$ MPa
$\nu=0.3$
$f_y=500$ MPa

Anotaciones finales

Para la facilidad del lector, en el Cuadro C.1, presentado en el Apéndice C, se agrupan todos los parámetros materiales a introducir, en función del material y en que modelo de ABAQUS se define.

En lo que respecta la definición tabular del material, más allá de la formulación presentada para el cálculo de las relaciones tensión uniaxial-deformación inelástica o de fisuración, cuya obtención puede parecer compleja, el procedimiento para su cómputo es sencillo. Basta con obtener la relación tensión-deformación correspondiente y sustraer a las deformaciones

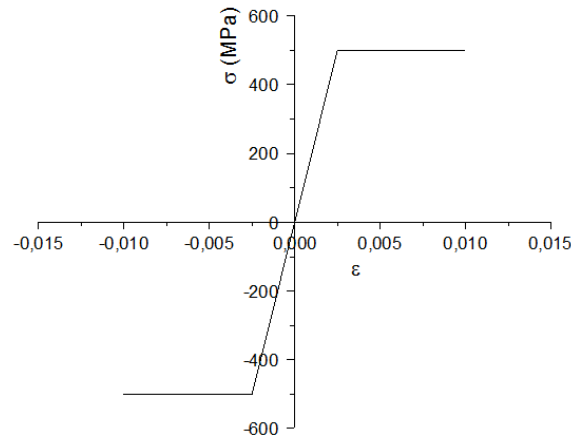


Figura 3.7: Relación bilineal tensión-deformación uniaxial para el acero

post-plásticas la parte correspondiente a la deformación elástica (asociada a la tensión del binomio $\sigma - \varepsilon$ la cual se está evaluando).

Un aspecto que no se ha mencionado hasta el momento es la definición del daño. Tanto el modelo utilizado para el hormigón como el modelo utilizado para el acero permiten incorporar el concepto de daño, el cual degrada la rigidez del material. En ninguno de los casos se ha optado por utilizarlo.

Genikomosou y Polak, en [33], investigan la incorporación del daño en el modelo plástico del hormigón con resultados no positivos en las simulaciones. Por otro lado, incorporar el daño en el acero comportaría un incremento en la complejidad del modelo, la cual no tendría un retorno equitativo en el resultado.

Independientemente, el tipo de problema físico que se está modelizando es del tipo carga monotónica, por lo que la degradación no juega un papel importante, sí para el caso de cargas cíclicas.

3.2.3. Configuración de la simulación

Una vez definidos los materiales, los cuales merecen una sección diferenciada, ya se está en disposición de definir las características y propiedades del modelo numérico para la simulación del punzonamiento con y sin tracciones contenidas en el plano.

De acuerdo con las necesidades de ABAQUS para definir el problema numérico, se deben definir las siguientes propiedades:

- Definición de la geometría
- Definición de propiedades materiales (✓)

- Definición de los contactos relativos entre miembros
- Definición del mallado
- Definición de las cargas y condiciones de contorno

Previo a cualquier consideración específica del modelado, es importante establecer las unidades métricas con las que se presenta este trabajo (y por ende todas las unidades introducidas en el programa). Las cuales son: **mm** (milímetros), **s** (segundos), **N** (Newton), **T** (Tonelada), **MPa** (Megapascal) y las derivadas de utilizar las unidades básicas.

Cabe decir que ABAQUS trabaja de manera adimensional, y por ello es importante mantener siempre la consistencia en las unidades.

Otro de los aspectos generales a tener en cuenta es la intención de realizar múltiples simulaciones parametrizadas, donde la variación de una sola característica es llevado a cabo.

Por ello, se ha desarrollado un código escrito en *python*, el cual permite realizar simulaciones por lotes, modificando parámetros como las propiedades materiales, tamaño de malla o tracciones aplicadas. Los datos y/o dimensiones especificados en este punto son las definidas de manera estándar y solo se modifican si se indica lo contrario.

Tal y como se ha introducido extensamente en la Sección 3.1, para el análisis de estructuras en el continuo existen principalmente dos métodos, cálculo implícito y cálculo explícito. Dado el incremento en la velocidad de simulación, necesario dado que se requieren múltiples simulaciones, y la relativamente poca caída en precisión, el motor de cálculo escogido para las simulaciones es el explícito.

Considerando la geometría de la losa, definida en la Sección 3.2.1, esta presenta doble simetría en las direcciones X y Y , contenidas en el plano horizontal. Esta propiedad de simetría se puede explotar con el fin de reducir la capacidad de cálculo requerida por parte del modelo, de manera que, reduciendo la geometría del modelo a un 25 % de la original y con las condiciones de contorno adecuadas (empotramientos deslizantes en el plano vertical) se puede lograr, o bien una reducción importante en el número de nodos, o bien un refinamiento en el mallado (con el mismo número de nodos que un hipotético modelo completo).

Así pues, de ahora en adelante, la geometría a la cual se hace referencia es un cuarto de la losa, tal y como muestra la Figura 3.8. En la misma figura se muestra el sistema de referencia, el cual esta situado en el plano medio de la losa y en el hipotético centro de esta.

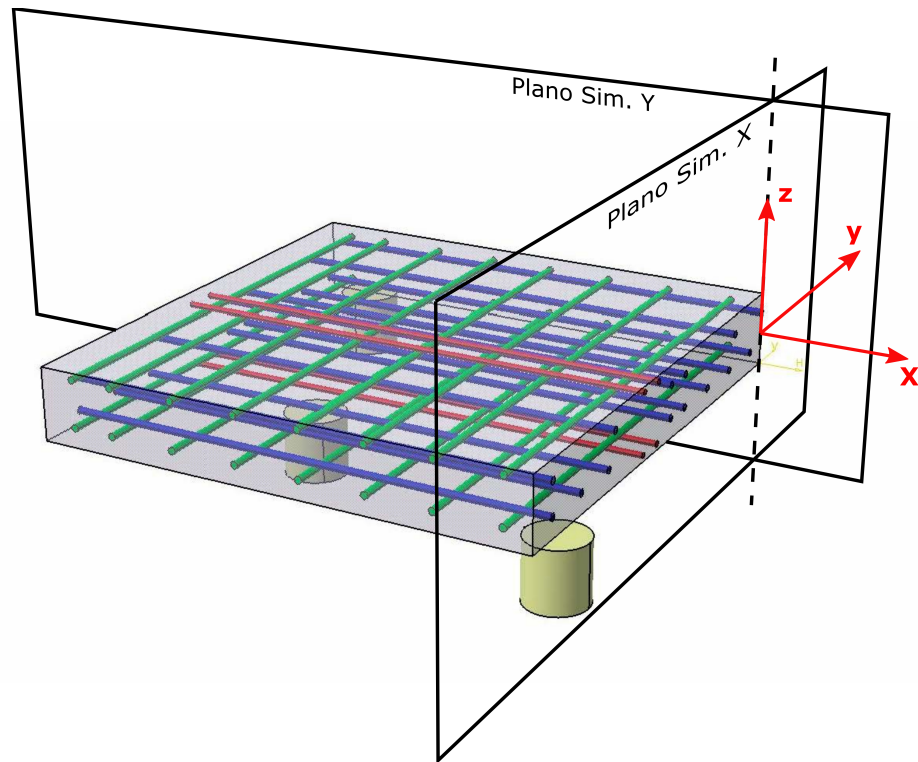


Figura 3.8: Representación gráfica de la porción de losa a simular, incorporando los ejes de referencia

En la Figura 3.8 se pueden apreciar tres tipos de elementos geométricos, los cuales se definen de manera distinta en ABAQUS, y se han modelado en función de sus características.

- La propia losa de hormigón (sin armadura) se define cómo un sólido tridimensional deformable con propiedades materiales de hormigón (definidas en la Sección 3.2.2)
- Las armaduras se proponen como elementos alámbricos (1D en un espacio 3D) discretos, definidos como elemento estructural tipo Viga (*Beam element*) en ABAQUS. Dichos elementos se definen mediante su propia directriz (objeto alámbrico) conjuntamente con su sección, en este caso circular con el diámetro correspondiente. Los elementos viga tienen tres grados de libertad, asociados a una deformación de compresión, una curvatura debido al momento y torsión.
- Los soportes y placa de carga se definen como sólidos rígidos (no aceptan deformación) los cuales se modelan como superficies.

Para poder activar el comportamiento conjunto de hormigón-armadura

es necesario definir la interacción entre ambos elementos, en el que las barras de acero son embebidas dentro del sólido continuo definido por el hormigón. Dicho vínculo, llamado *Embedded regions* en ABAQUS, permite incrustar grupos de elementos (barras de armadura) en un segundo elemento huésped (hormigón) en el que la respuesta de los elementos incrustados modifican las propiedades mecánicas del elemento huésped.

Adicionalmente, es necesario definir interacciones de contacto entre el hormigón y los elementos rígidos (apoyos y placa de carga). De esta manera se especifica qué nodos de un elemento interactúan con los nodos de otro elemento, en este caso para las parejas hormigón-apoyos y hormigón-placa de carga.

La interacción consta de dos variables, comportamiento normal y tangencial. Se define el comportamiento normal como *contacto duro* (*Hard Contact*), en el que una superficie no puede penetrar en la adyacente (controlando la posición relativa de los nodos bajo interacción).

Por otro lado, el comportamiento tangencial se define como deslizante (fricción cero), dado que no se espera ningún tipo de desplazamiento relativo entre apoyos-hormigón y placa de carga-hormigón.

Otro aspecto clave para el desarrollo de la simulación es el mallado de los elementos, el cual es una de las bases de los elementos finitos. Dado que se han presentado tres elementos distintos (sólidos continuos, elementos barra y sólidos rígidos) es necesario proponer un mallado distinto para cada uno de ellos.

El mallado del hormigón se basa en elementos cúbicos de 8 nodos (vértices del cubo) tipo **C3D8R**. La dimensión característica de la arista es aproximadamente de 20mm, la cual se analizará en la Sección 3.3.3, frente otras dimensiones.

Las armaduras dispuestas en el espacio de la losa, dado que estan definidas como objetos viga, el elemento finito propuesto es el **B31**, el cual se trata de un elemento constituido por 2 nodos en el espacio. La dimensión característica, que en este caso se puede definir como la distancia entre nodos sucesivos en la directriz del objeto, es también de 20mm

Para los apoyos y la placa de carga también es necesario definir una malla, pese a no sufrir tensiones/deformaciones, dado que esta interacciona con la malla del hormigón. Los elementos escogidos son del tipo **R3D4**, los cuales generan una malla formada por cuadriláteros sobre las superficies de los sólidos rígidos.

Finalmente, para concluir la definición del modelo a simular, es necesario determinar las cargas aplicadas y las condiciones de contorno que se aplican sobre la losa.

Inicialmente se definen las condiciones de contorno, las cuales se propa-

garán durante toda la simulación. Estas son:

- Empotramiento de los apoyos, sobre los que reposa la losa
- Condición de simetría respecto el plano X con un empotramiento deslizante, o equivalentemente, definido como deslizamiento en el eje X y rotaciones en los ejes Y y Z impedidos ($U1=UR2=UR3=0$)
- Condición de simetría respecto el plano Y, equivalentemente al punto anterior, desplazamiento en el eje Y y rotaciones en los ejes X y Z impedidos ($U2=UR1=UR3=0$)

En el estado de carga sucesivo, se aplica la carga debida al peso propio, con una aceleración sobre todo el modelo de $g = -9810 \text{ mm/s}^2$.

El último estado de carga consta de la propia carga a punzonamiento, ya que todavía no se analizan las tracciones en el plano. Con el objetivo de reproducir los futuros ensayos de laboratorio, al igual que intentar capturar la curva completa de Carga-Desplazamiento (ramas elástica y post-elástica) la carga a punzonamiento se aplica mediante **control de desplazamiento** y no mediante incremento de carga. Ello implica que se aplica un desplazamiento incremental a través de la placa de carga y se mide la reacción generada por la losa. Esto permite capturar procesos de reblandecimiento del material.

El desplazamiento último impuesto es de **20mm** sobre la dirección del eje Z y sentido descendente. Este valor es fruto de un tanteo, el cual empezó por 35mm pero que mostraba una curva post-rotura demasiado extensa, tal y como se puede comprobar en la Sección 3.3 sobre los resultados numéricos.

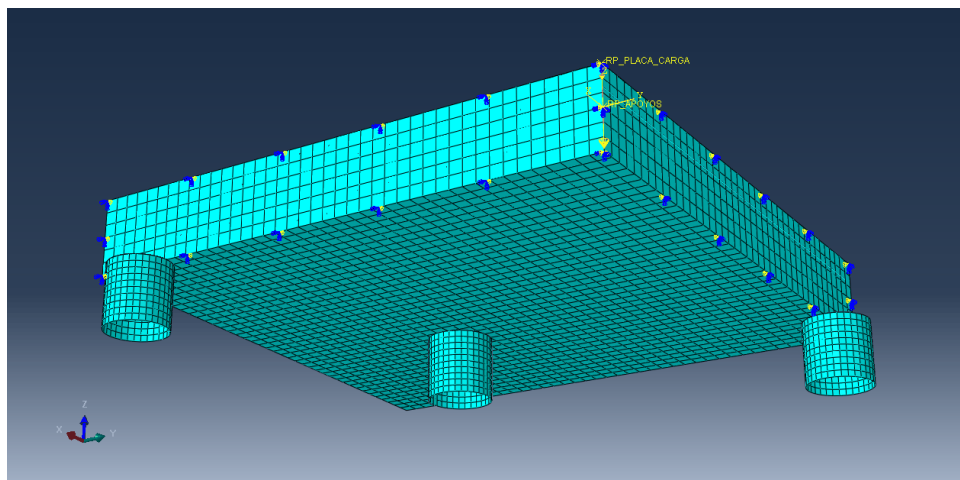


Figura 3.9: Modelo de elementos finitos definido en ABAQUS.

La Figura 3.9 muestra, a modo de recapitulación, varias de las características descritas sobre el modelo definido. En ella se muestran las condiciones de contorno por simetría, el desplazamiento impuesto (flecha vertical amarilla) sobre la misma placa y los apoyos, concebidos como superficies rígidas.

3.3. Resultados

Una vez ya realizadas las primeras simulaciones, se está en posición de analizar si los resultados que provee el modelo numérico son consistentes y aportan una descripción relevante sobre la rotura.

Es importante subrayar que uno de los objetivos principales de este trabajo es dar soporte a una campaña de ensayos experimentales sobre losas sometidas a punzonamiento y tracciones contenidas en el plano, mediante la definición de un modelo numérico robusto. Por ello, esta sección es importante, para detectar qué parámetros son clave y si, sin la imposición de tracciones, el modelo es capaz de reproducir de manera satisfactoria la rotura.

Las herramientas utilizadas para evaluar los resultados numéricos, dado que todavía no se dispone de ningún ensayo de referencia, son los resultados presentados por *Adefita y Polak* en [30], conjuntamente con los resultados numéricos producidos por *Genikomsou y Polak* en [33]. Adicionalmente se utilizan las expresiones propuestas en el modelo de referencia de *Marí et al.* [11] y las expresiones normativas de la *EN1992-1-1*.

Los resultados presentados de ahora en adelante, a no ser que se indique lo contrario, son lecturas tomadas (del modelo numérico) a partir del desplazamiento y reacción obtenidos en la placa de carga (en el paramento superior).

3.3.1. Resultados iniciales

La Figura 3.10 introduce la curva desplazamiento de la losa propuesta en la Sección 3.2.1. Estas curvas son usadas a lo largo del trabajo como elementos de comparación y referencia.

De los resultados numéricos obtenidos, se pueden concluir la resistencia máxima a punzonamiento, conjuntamente con la flecha asociada a la carga máxima. Dichos resultados se presentan en el Cuadro 3.1.

De la Figura 3.10 se puede observar el comportamiento global de la losa bajo una carga concentrada. Esta, desarrolla un comportamiento prácticamente elástico lineal hasta una carga de $\approx 80\text{-}90\text{kN}$. Posteriormente se inicia una primera fisuración, que se hace patente con el cambio de pendiente,

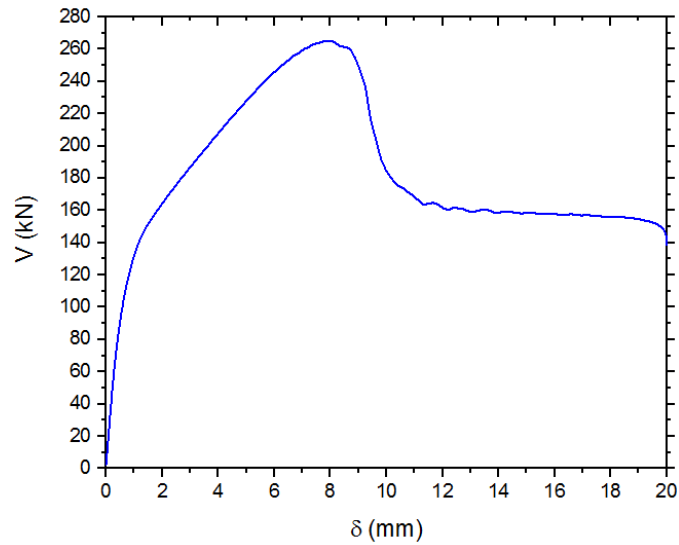


Figura 3.10: Curva Carga-Desplazamiento para la simulación de la losa propuesta

Carga máxima (kN)	Flecha última (mm)
265,17	7.95

Cuadro 3.1: Binomio Carga-desplazamiento máximos

continuyendo seguidamente con un comportamiento lineal con menor rigidez, propio del comportamiento fisurado del hormigón. Finalmente, sobre los 260kN se desencadena la rotura de la losa, tal y como era de esperar mediante una caída muy importante de la resistencia post-pico, señal de una rotura frágil.

En la Figura 3.11 se presenta la vista inferior de la losa, justo en el punto de carga máxima. Esta vista representa las tensiones principales máximas (positivas de tracción). De ella se aprecia, de manera global, el patrón de fisuración y rotura.

En la Figura 3.12 se presentan distintos estados de carga sobre la losa. El primero (izquierda) representa el estado de tensiones principales máximas (tracciones) en el inicio de la fisuración, el cual coincide con el cambio de pendiente de la curva Carga-Desplazamiento, siendo la carga aplicada de 136.5kN.

El segundo estado de tensiones (derecha) representa también la tensión principal máxima (tracciones), pero en un estado de carga justo después de la máxima. De ella se puede apreciar la pérdida total de resistencia a

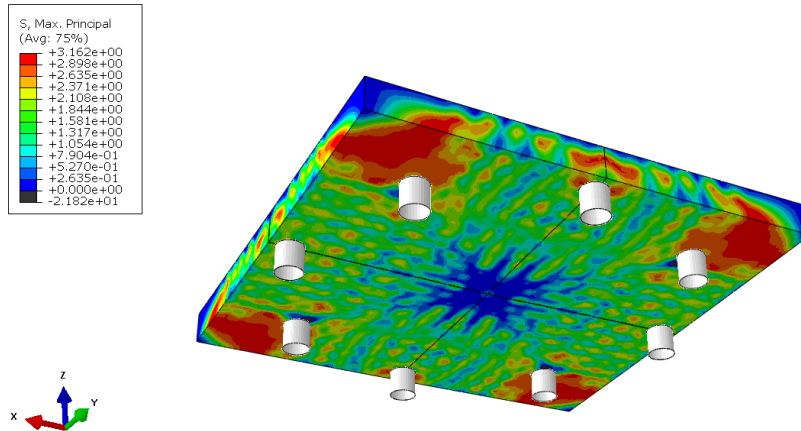


Figura 3.11: Tensiones principales máximas (de tracción) en el paramento traccionado de la losa, justo en el punto de carga máxima

tracción en el paramento inferior (colores azules) con los correspondientes patrones de fisuración, los cuales siguen la geometría de la armadura.

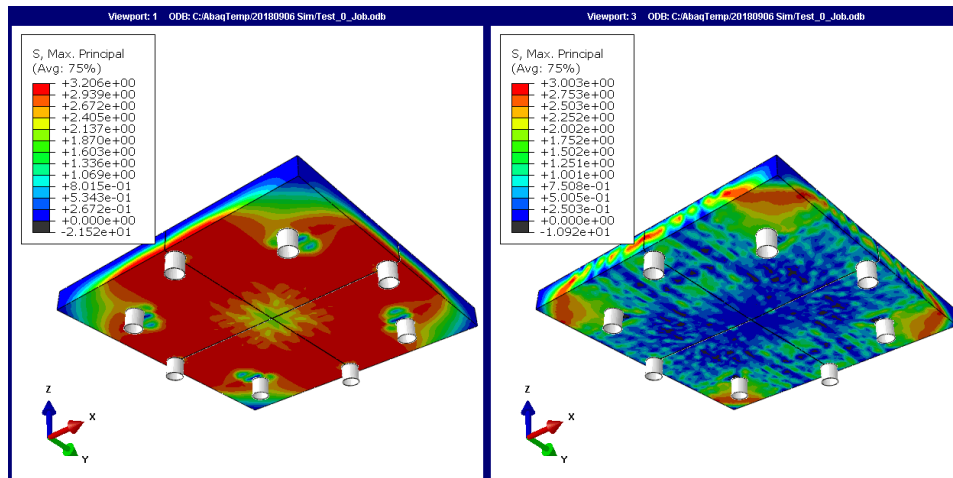


Figura 3.12: Tensiones principales máximas (tracciones) en el paramento inferior. En un estado de carga intermedio donde aparece la primera fisuración durante la segunda rama lineal (izquierda). Estado de carga justo posterior a la carga máxima (derecha)

Para la adecuada visualización de los patrones de fisura en el modelo plástico del hormigón, ABAQUS en [29], recomienda analizar las deformaciones plásticas principales máximas conjuntamente con las tensiones principales máximas, ambas de manera vectorial. Dado que el modelo no puede predecir la fisuración de manera discreta, ha de recurrirse a la deformación

plástica. Cuando esta es superior a cero se asume que la fisuración ha empezado. La dirección de la fisura puede trazarse dado que, la dirección del vector de deformaciones plásticas es paralelo al vector normal a la superficie de rotura (por ello ha de mostrarse de manera vectorial).

En la Figura 3.13 se presenta el cuarto de losa simulado, representando tensiones (izquierda) y deformaciones (derecha). De la imagen se puede apreciar claramente el cono de rotura que se produce en el momento justo después de la carga máxima. La superficie troncocónica la marca la región con las mayores deformaciones y las bajas tracciones.

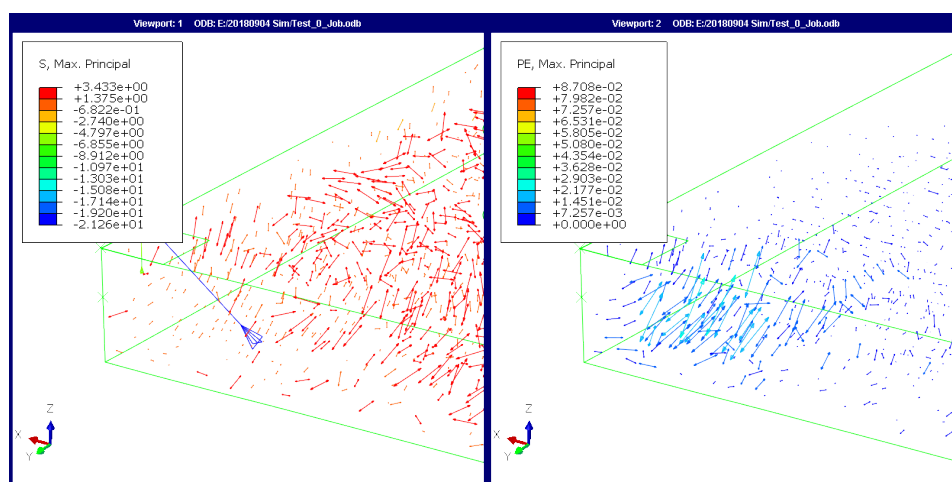


Figura 3.13: Representación de la superficie de rotura y el *tronco-cono* de hormigón resultante. Tensiones principales máximas (izquierda) y deformaciones plásticas principales máximas (derecha)

El modelo numérico parece reproducir de manera adecuada la mecánica del punzonamiento, conduciendo a una superficie de rotura coherente y a una curva Carga-Desplazamiento razonable.

Extendiendo la validación de los resultados, se presenta una comparación entre los resultados experimentales obtenidos por *Adetifa y Polak* en [30] y numéricos obtenidos por *Genikomsou y Polak* en [33]. En esta última referencia también se presenta una comparación entre resultados numéricos y experimentales.

La Figura 3.14 y el Cuadro 3.2 presentan los resultados obtenidos por las autoras en [30]. De la Figura y Cuadro mencionados se pueden apreciar dos hechos.

Por un lado, la resistencia última presentada tras los ensayos de *Adetifa y Polak*, en comparación con el resultado numérico obtenido, son muy si-

	Carga (kN)	Desplazamiento (mm)
Adetifa y Polak	253	11.9
Autor	265	7.95
Error (%)	4.81	33.2

Cuadro 3.2: Resultados experimentales de *Adetifa y Polak* ([30]) en comparación con los resultados obtenidos en las simulaciones.

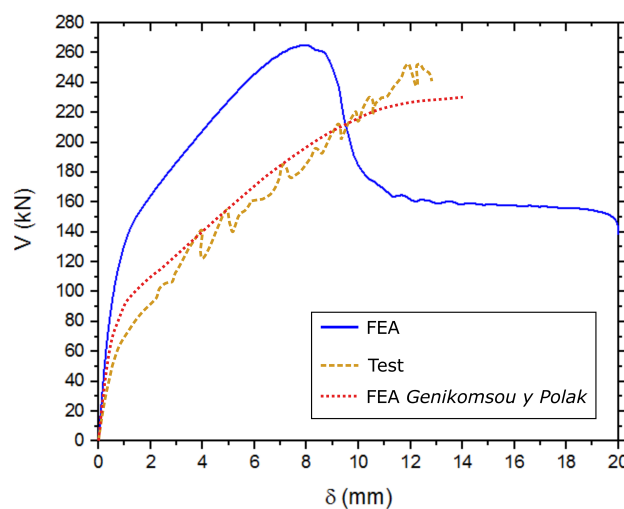


Figura 3.14: Comparación de las curvas Carga-Desplazamiento de los resultados numéricos propuestos frente a los resultados experimentales obtenidos por *Adetifa y Polak* en [30] y numéricos obtenidos por *Genikomsou y Polak* en [33] (*Referencia de ensayo SB1*).

milares, con tan solo una diferencia del 4.81 % para losas de características similares.

Por otro lado, la deformación correspondiente a la carga máxima obtenida en las simulaciones dista de la deformación resultante de los ensayos. Una de las posibles razones que explican esta diferencia, verificada mediante la curva Carga-Desplazamiento mostrada en la Figura 3.15, es el hecho de tener distintas condiciones de apoyo.

En los ensayos presentados por *Adetifa y Polak* [30] las condiciones de apoyo son distintas a las propuestas para la losa de estudio. Estos son apoyos simples continuos a lo largo de las cuatro aristas de la losa conjuntamente con coacciones al levantamiento de las cuatro esquinas, frente a los ocho apoyos simples formando los vértices de un octógono presentados para este trabajo.

Justificando el hecho anterior, si se disponen los ocho apoyos tal y como muestra la Figura 3.15a, que es una configuración distinta a la actual. La

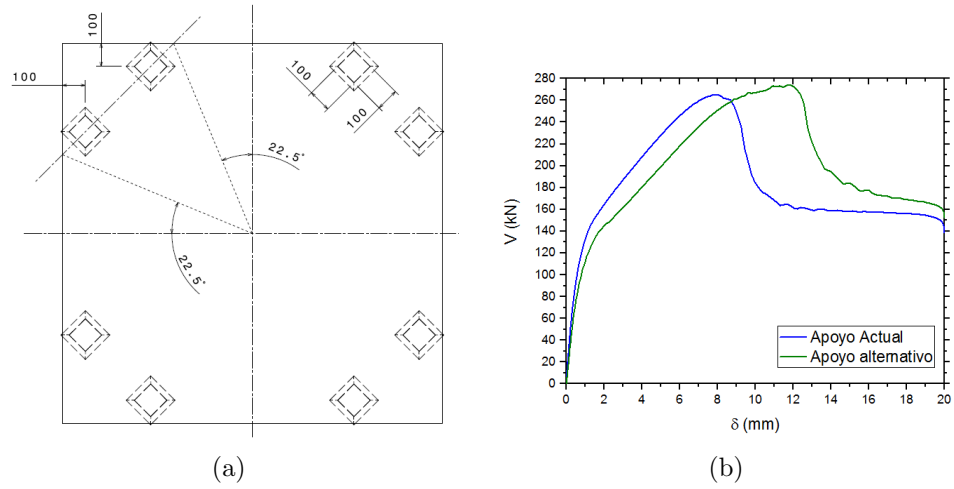


Figura 3.15: Representación de apoyos alternativos (a) y diferencia entre curvas Carga-Desplazamiento debido a la modificación de los apoyos

diferencia entre cargas máximas es casi nula. Por el contrario, la diferencia entre flechas asociadas a la carga máxima llega a los 4mm, que es aproximadamente la diferencia obtenida frente a los ensayos experimentales de [33].

Otro aspecto donde se puede apreciar cierta diferencia entre la solución numérica y la respuesta experimental es en el desarrollo de la rama elástica, conjuntamente con la transición a la rama post-elástica (tensión de fisuración) y la rigidez de esta.

Se observa una rigidez superior en las simulaciones presentadas, en comparación tanto con la simulación numérica de *Genikomsou y Polak* como en los resultados experimentales. A su vez, los resultados numéricos de la literatura presentan también una rigidez mayor. La razón por la que en el modelo propuesto se observa mayor rigidez frente al resultado numérico de la literatura es, en mayor parte, debido al mayor valor del módulo elástico definido en el modelo propio, con la intención de asegurar la continuidad entre la rama elástica y plástica. Adicionalmente, el hecho de presentar condiciones de apoyo distintas también sugiere cierta diferencia en los módulos elásticos.

Por otro lado, se observa que la tensión de fisuración (la cual marca la transición entre la rama elástica y post-elástica) es mayor en los modelos numéricos (en ambos) frente a los resultados experimentales. Esto está motivado por el hecho que ambos modelos numéricos no incorporan las tensiones y fisuración térmicas propias del curado, las cuales modifican tanto la rigidez como la tensión de fisuración y, por ello, conducen a valores inferiores en los resultados experimentales.

Comparando solamente los resultados numéricos, puede observarse una

ligera diferencia entre las rigideces post-elásticas, siendo más elevada la que se deriva de los resultados obtenidos. Tal y como muestra la Figura 3.15, para diferentes configuraciones de apoyo, se obtienen distintas rigideces en la rama post-elástica. Este hecho, pues, justificaría la ligera diferencia que aparece en términos de rigidez post-elástica.

En lo que respecta la armadura, los redondos señalados como ①, del paramento traccionado en la Figura 3.1, son los primeros en plastificar bajo una carga de 219kN, a un 83 % de la carga de rotura.

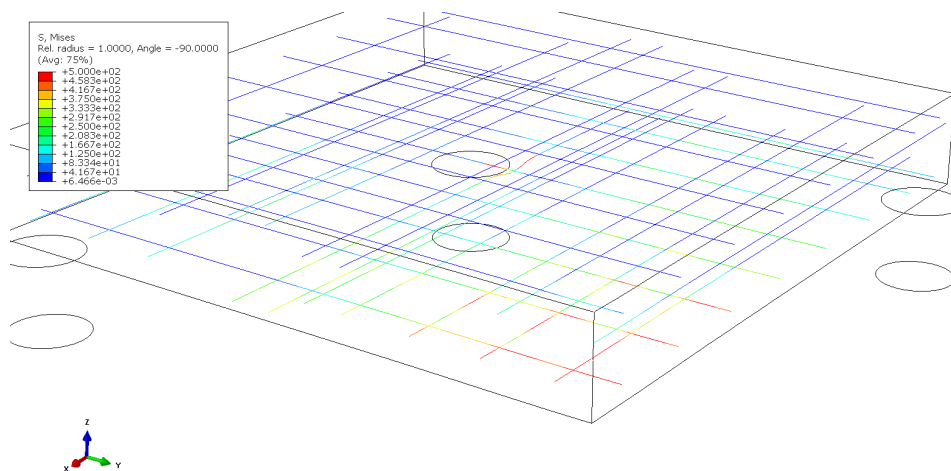


Figura 3.16: Tensión de Von Mises para las armaduras de acero, habiendo plastificado parte de ella en el momento de la carga máxima

La Figura 3.16 muestra la tensión de Mises de la armadura en el momento de carga máxima. De esta se puede ver como la armadura ha plastificado justo en el centro de la losa (debido a flexión) y bajo la carga aproximada de 219kN. Al aumentar la carga hasta la carga máxima, aparece también cierta plastificación local algo más alejada del centro, pudiendo coincidir esta localización con la superficie de rotura del hormigón.

El hecho que la armadura plastifique a 219kN pero exista, a su vez, margen para cargar todavía más la losa hasta llegar a los 265kN indica la capacidad de esta para redistribuir internamente los esfuerzos y continuar resistiendo. Esto es fruto de la propiedad bidireccional que presenta la losa y el desarrollo tridimensional que adquieren los esfuerzos a flexión y cortante, de este modo, se aumenta la resistencia de la losa más allá de la plastificación de acero y bajo tensiones de compresión aceptables del hormigón (este no ha colapsado por compresión)

En la Figura 3.17 se muestran los paramentos superior e inferior de la losa bajo el desplazamiento último impuesto (-20mm). De ella se desprende

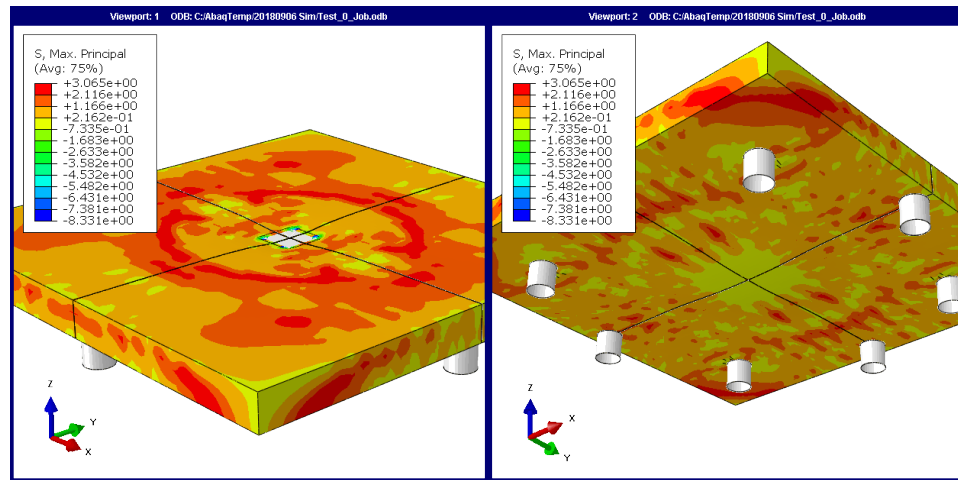


Figura 3.17: Tensión principal máxima en el paramento superior e inferior tras la imposición de un desplazamiento de 20mm mediante la placa de carga.

la capacidad del modelo para reproducir, de manera global, las caídas de tensión debido a la fisuración y el papel que juega la armadura y las tensiones que esta genera sobre el hormigón una vez superada la carga pico.

En la misma figura, se pueden apreciar perfectamente los círculos que genera la superficie de rotura troncocónica en los paramentos superior e inferior.

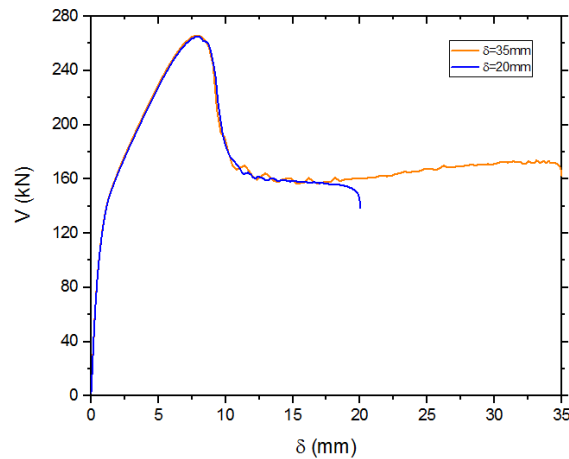


Figura 3.18: Curva Carga-Desplazamiento de la simulación bajo un control de desplazamiento máximo de -35mm, frente al resultado propuesto (desplazamiento vertical máximo de -20mm)

Analizando el comportamiento post-pico, puede apreciarse que la resis-

tencia que presenta la losa puede aumentar al incrementar el desplazamiento impuesto en el centro de la losa, tal y como muestra la Figura 3.18, donde se ha impuesto un desplazamiento controlado máximo de -35mm.

La curva Carga-Desplazamiento muestra un ligero incremento de la resistencia tras la brusca caída de esta. Este fenómeno está en sintonía con los resultados experimentales obtenidos por *Fernández et al.* en [4]. El incremento de la resistencia se basa en la contribución de la armadura longitudinal, cuyas deformaciones tras la carga post-pico distan todavía de la deformación última del acero, siendo estas del orden de $\varepsilon = 0,0047$, a partir de los datos de la simulación.

Una verificación final que se debe realizar, más allá del comportamiento resistente frente al punzonamiento, es si el cálculo numérico es realmente cuasi-estático, dado que esta es una suposición inicial que permite utilizar el motor de cálculo explícito.

Observando las energías cinéticas e internas desarrolladas en el curso de la simulación, puede observarse que las primeras representan, como máximo, el 0.16 % de la energía interna. Siguiendo las recomendaciones del manual de ABAQUS [29], la energía cinética no debería ser nunca superior al 5-10 % de la energía interna, cuya cuestión se cumple en este caso.

Por ello se puede asumir que la simulación es realmente cuasi-estática.

Finalmente, para tener una clara visualización del proceso de carga simulado, en el Apéndice-D se presenta una secuencia de imágenes que permiten observar la evolución del daño en el paramento traccionado de la simulación presentada en esta sección.

3.3.2. Comparación frente al modelo de referencia

Otro de los objetivos propuestos en el trabajo es la comparación de los resultados numéricos frente a resultados obtenidos mediante códigos normativos y mediante la formulación de referencia, de *Marí et al.*, presentada en [11]. Para la comparación, se toman los resultados obtenidos en el Apéndice-B en referencia al resultado obtenido mediante el *Eurocódigo 2* y la mencionada formulación de referencia.

Comparando dichos resultados con los obtenidos numéricamente y los presentados por las autoras *Adetifa y Polak* en [30], se presenta el Cuadro 3.3.

En la comparación se ha incorporado el resultado experimental presentado en [33] y [30] (son el mismo) para poder comparar de manera más global, considerando que la losa ensayada por las autoras y la configuración propuesta para las simulaciones es similar.

	Carga máxima (kN)	Dif. Simulación (%)	Dif. Experimental (%)
Simulación	265	-	4.81
Experimental	253	-	-
Marí <i>et al.</i>	230.13	13.2	9.1
EC2	205	22.6	19

Cuadro 3.3: Comparación de cálculos *manuales* de punzonamiento frente la simulación presentada y los resultados de *Adetifa y Polak* en [30].

De ambos resultados analíticos puede observarse que la resistencia máxima queda por debajo de las cargas ensayadas (caso numérico y experimental). Esto no representa un problema vital, dado que queda del lado de la seguridad, aunque, considerando que no se ha usado ningún coeficiente de seguridad (que son los que deberían aportar la “seguridad”) tampoco son resultados óptimos.

Comparando individualmente cada uno de los resultados *de diseño*, se puede observar claramente como la expresión simplificada propuesta por *Marí et al.* [11] conduce a mucho mejores resultados, con una diferencia respecto el resultado “real” cercana a la mitad que la diferencia que presenta el resultado del Eurocódigo 2.

Una diferencia del 9.1 % entre un resultado analítico y un resultado experimental, tal y como sucede con la formulación propuesta por *Marí et al.* es buen resultado; todavía más considerando que el error presentado por las simulaciones de *Genikomsou y Polak* en [33] frente a sus propios resultados experimentales es de 7.5 %.

3.3.3. Análisis paramétrico del modelo numérico

Una de las principales ventajas de analizar mediante métodos numéricos, si se captura adecuadamente el fenómeno mecánico, es la posibilidad de jugar con las variables del problema, e identificar de este modo, cuales de ellas juegan un papel importante para el caso de interés, la rotura de la losa.

Adicionalmente, una de las herramientas con las que se propone analizar la idoneidad del modelo, para los futuros ensayos experimentales, es la evaluación de los principales parámetros introducidos en el modelo numéricos. De este modo se puede conocer de ante mano cuáles son los parámetros que pueden influenciar o no futuras comparaciones entre ensayos experimentales y numéricos.

En este trabajo se presenta una evaluación paramétrica, variando 4 parámetros relevantes, a priori, para la definición del modelo o para la detección de si este es determinante en el fenómeno de punzonamiento. A parte de las tracciones (presentadas en el Capítulo 4), los parámetros variados son: tamaño de mallado, Energía de fractura G_f , Resistencia a compresión

f_{cm} que a su vez afecta la resistencia a tracción y la Dilatancia del modelo material (ψ).

Influencia del tamaño de malla

Tradicionalmente el tamaño de malla ha jugado un papel importante en el las simulaciones mediante elementos finitos. Para un material homogéneo dúctil y bajo un régimen elástico-plástico lejos de la rotura (como el acero) el mallado permite jugar con el balance *calidad de resultados - tiempo de cómputo*, donde tradicionalmente la malla se refina en zonas dónde se esperan grandes variaciones de tensión en poco espacio o con geometrías complejas.

Por otro lado, el hormigón presenta un inconveniente frente al ejemplo anterior. Este es extremadamente frágil bajo tensiones de tracción, donde habitualmente se presentan estados fisurados. Dicha fisuración tiene un comportamiento localizado y, por ello, un refinamiento de la malla introduce bandas de fisuración más estrechas, lo que a su vez conduce a no convergir en una única solución [29].

Adicionalmente, los elementos numéricos que se sitúan en regiones no armadas, que por ello, no se ven afectados por el incremento de rigidez que aporta la armadura, padecen de una sensibilidad al tamaño de mallado importante [29].

Es por estas razones que en simulaciones donde se utilizan modelos materiales plásticos con reblandecimiento (dependencia de desplazamientos y no de deformaciones) es importante realizar un estudio sobre la sensibilidad de la malla.

La Figura 3.19 y el Cuadro 3.4 muestran de manera comparativa las curvas Carga-Desplazamiento y la carga máxima de la misma losa pero con distintos tamaños de malla.

	Carga máxima (kN)	Num. Elementos
m=10mm	298	82668
m=15mm	308.08	24200
m=16mm	272.27	21632
m=18mm	287.14	14812
m=20mm	265	10086
m=22mm	150.48	7220
m=24mm	196.37	5780
m=30mm	178.42	3136

Cuadro 3.4: Datos del análisis de la sensibilidad del mallado

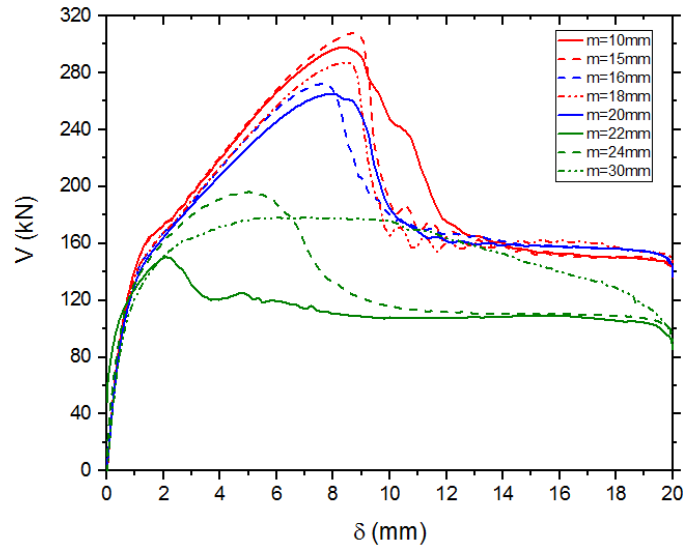


Figura 3.19: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos tamaños de malla

A simple vista puede observarse, de las curvas presentadas, la sensibilidad que presenta el resultado para distintos valores de tamaño de malla, incluso con variaciones del orden de milímetros. Este hecho va en sintonía con lo enunciado anteriormente sobre la sensibilidad del resultado a cambios en el mallado, los cuales afectan tanto a carga máxima como a desplazamiento en carga máxima.

De la Figura 3.20 puede apreciarse que solamente el resultado asociado a una malla de 16mm presenta un valor de carga similar al asumido valor de referencia, con una malla de 20mm.

Del mismo gráfico, también se puede observar como, al incrementar el tamaño de malla (22-24-30mm) los resultados se desploman hasta un 60-75 % de la carga de referencia. Pese a ser algo posible en mallas gruesas (como la de 30mm), la caída de carga para mallas de 22 y 24mm no concuerda con análisis similares presentados por otros autores, por ejemplo, la comparación presentada por *Genikomsou y Polak* en [33]. Por otro lado, comparando con la misma referencia, sí concuerda el comportamiento dúctil que se desarrolla para mallas gruesas, que en el caso presentado se desarrolla para mallas de 24 y 30mm.

Tal y como se puede observar en las Figuras 3.19 (mediante un código de colores) y 3.20, es la creación de tres grupos de resultados frente al tamaño de malla. Mallados muy finos presentan el ya mencionado problema de convergencia durante la propagación de la fisura (curvas de color *rojo*), mallados cercanos al escogido de 20mm los cuales presentan variación pero

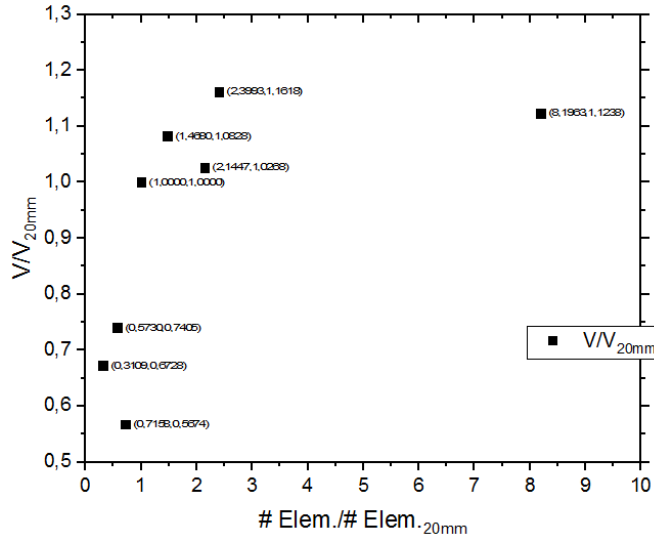


Figura 3.20: Comparación de la carga máxima en función del número de elementos (relativo al numero de elementos correspondiente a $m=20\text{mm}$)

cercanos a un valor (curvas azules) y finalmente mallados más gruesos que los valores de referencia y que presentan un comportamiento más dúctil de lo esperado (curvas de color *verde*). Este hecho podría ser un indicativo en el momento de analizar el impacto de la malla en comparaciones numéricas frente a ensayos experimentales.

A partir de la Figura 3.21 puede compararse la distribución de tensiones principales máximas del paramento inferior para el caso de referencia (derecha) y el caso con tamaño de malla $m=10\text{mm}$ (izquierda). Es observable la localización del “daño” en la configuración de referencia, frente a una caída de las tensiones más generalizadas en todo el paramento para el caso de un mallado más fino debido a la tensión que aparece en las armaduras. Esto demuestra la sensibilidad de mallas más finas frente a la fisuración, pero sin capturar la fisuración crítica que corresponde al punzonamiento, como si hacen mallados más equilibrados.

Influencia de la Energía de Fractura (G_f) y la resistencia a compresión (f_{cm})

Uno de los parámetros mecánicos que puede tener un importante impacto en la rotura a punzonamiento es la Energía de Fractura, la cual esta asociada a la resistencia del material (como se muestra en la Ec.(3.10)) y puede dar a entender la importancia de la resistencia a tracción del material.

Otro de los parámetros que aparece en todos los modelos analíticos,

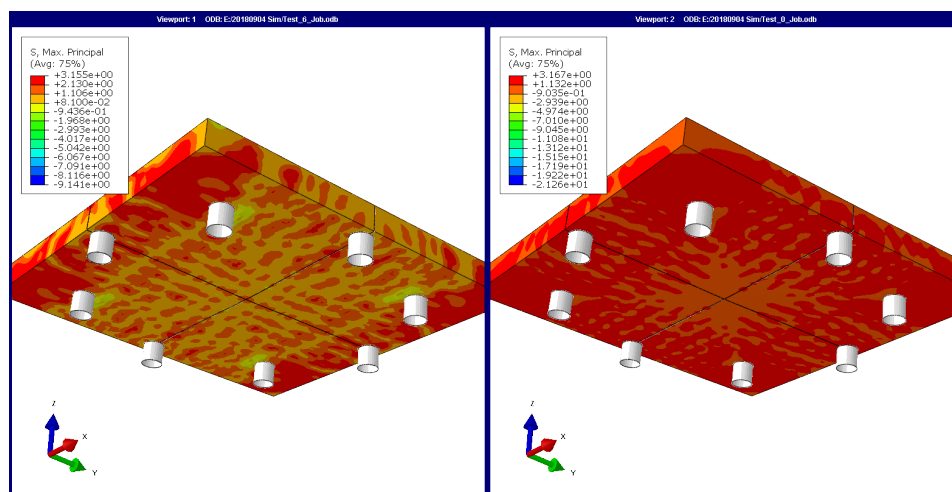


Figura 3.21: Comparación de las tensiones principales máximas (de tracción) de los casos con tamaño de malla $m=10\text{mm}$ (izquierda) y $m=20\text{mm}$ (derecha).

presentados en la revisión de la literatura, es la resistencia del hormigón. Algunos de estos consideran que la resistencia crítica es la resistencia a compresión confinada, mientras que otros, como el modelo de referencia de *Marí et al.*, consideran que la resistencia a tracción es la realmente relevante para la rotura a punzonamiento.

Dado que ambos parámetros son propiedades físicas (y no numéricas) del modelo numérico propuestos, puede ser significativo hacer una comparación conjunta de cada uno de los parámetros definidos. Para el análisis de dichas propiedades, se ha realizado una variación de cada uno de ellos, independientemente, sobre el modelo de referencia (definido en la Sección 3.2.3).

Considerando la Energía de Fractura, la Figura 3.22 y el Cuadro 3.5 presentan los resultados obtenidos tras simular varios casos con energías de fracturación distintas, modificadas artificialmente mediante la minoración/-mayoración del valor inicial.

Tal y como se puede observar en los resultados, y como era de esperar, con una mayor energía de fractura se obtiene mayor resistencia a punzonamiento, constatando el hecho que el comportamiento a tracción del hormigón juega un papel muy importante en el fenómeno mecánico de la rotura.

De los resultados puede verse como la resistencia incrementa de manera constante a medida que se aumenta la energía de fractura, sucediendo lo mismo con el desplazamiento asociado a la carga máxima.

Por otro lado, a partir de las curvas presentadas, puede apreciarse como el efecto de la energía de fractura se hace patente justo después de la rama

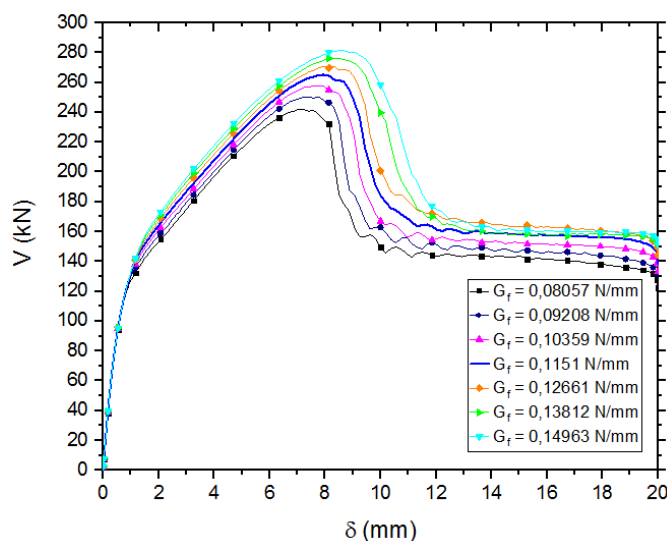


Figura 3.22: Curvas Carga-Desplazamiento para distintas Energías de Fractura

	Carga máxima (kN)	Desplazamiento (mm)
$G_f = 0,08057 N/mm$ (70 %)	242.17	7.05
$G_f = 0,09208 N/mm$ (80 %)	250.33	7.41
$G_f = 0,10359 N/mm$ (90 %)	257.79	7.77
$G_f = 0,1151 N/mm$ (100 %)	265.17	7.95
$G_f = 0,12661 N/mm$ (110 %)	270.87	7.95
$G_f = 0,13812 N/mm$ (120 %)	276.12	8.14
$G_f = 0,14963 N/mm$ (130 %)	281.32	8.51

Cuadro 3.5: Resultados de carga máxima-desplazamiento para los distintos valores de G_f estudiados

elástica, a partir de la primera fisuración del hormigón que marca el cambio de pendiente en la curva Carga-Desplazamiento. A partir de la transición elástica, en función de la misma energía de fractura, se obtiene mas o menos rigidez en la rama lineal post-elástica (cuanta más energía de fractura mayor rigidez).

Si se analiza con más detalle la relación que presenta el incremento en la energía de fractura con el incremento en la resistencia a punzonamiento puede observarse que esta es prácticamente lineal² y con una relación aproximadamente de 1:4, tal y como muestra la Figura 3.23a. Por otro lado, si se analiza también la relación entre el incremento de energía de fractura y

²Prácticamente lineal dado que la diferencia entre los valores de R^2 para el ajuste parabólico y lineal son 0.99977 y 0.99094 respectivamente, siendo estas bastante cercanos

el incremento en el desplazamiento en la carga máxima también se puede comprobar que la relación es aproximadamente 1:4. La Figura 3.23 muestra ambas relaciones.

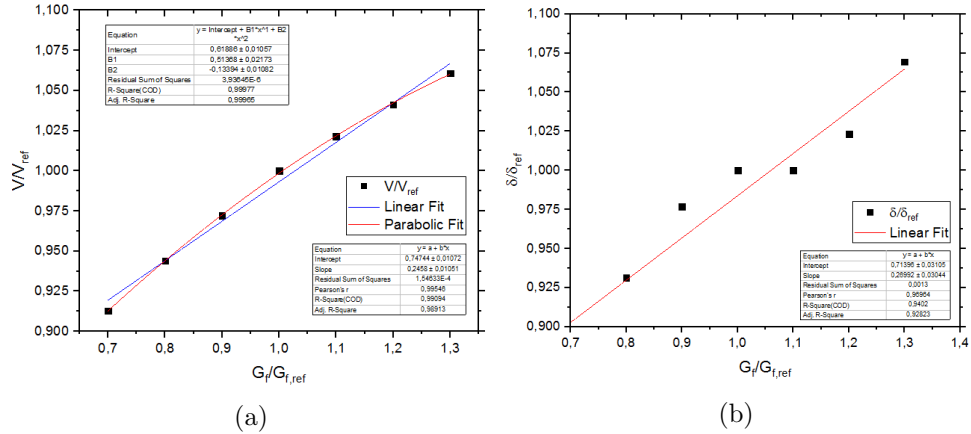


Figura 3.23: Relación Energía de Fractura Unitaria - Carga Unitaria en (a) y Energía de Fractura Unitaria - Desplazamiento Unitario en (b)

Considerando, por otro lado, la resistencia a compresión del hormigón, que indirectamente modifica la resistencia a tracción del mismo, se puede observar en la Figura 3.24 y el Cuadro 3.6 la influencia que esta tiene frente la resistencia a punzonamiento. Al igual que para el caso de la energía de fractura, se ha modificado la resistencia del hormigón porcentualmente a partir de la resistencia inicial de $f_{cm} = 43 \text{ MPa}$, definida en el modelo de referencia.

	Carga máxima (kN)	Desplazamiento (mm)
$f_{cm} = 25,8 \text{ MPa}$ (60 %)	203.6	6.87
$f_{cm} = 30,1 \text{ MPa}$ (70 %)	221.98	7.23
$f_{cm} = 34,4 \text{ MPa}$ (80 %)	238.95	7.59
$f_{cm} = 38,7 \text{ MPa}$ (90 %)	252.62	7.77
$f_{cm} = 43 \text{ MPa}$ (100 %)	265.17	7.95
$f_{cm} = 47,3 \text{ MPa}$ (110 %)	275.43	8.14
$f_{cm} = 51,6 \text{ MPa}$ (120 %)	284.76	8.14
$f_{cm} = 55,9 \text{ MPa}$ (130 %)	294.25	8.51

Cuadro 3.6: Resultados de carga máxima-desplazamiento para los distintos valores de f_{cm} estudiados

Al igual que sucedía con la energía de fractura, al incrementar la resistencia del hormigón la resistencia a punzonamiento aumenta. Tal y como muestra la Figura 3.24, tanto la resistencia máxima como la flecha en el

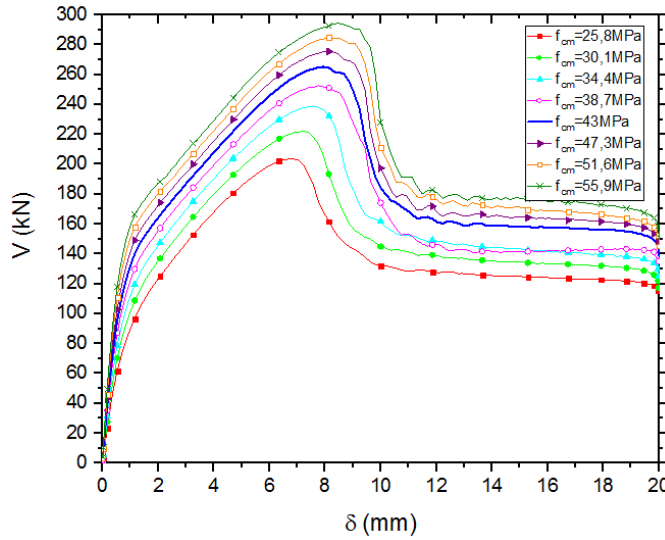


Figura 3.24: Curvas Carga-Desplazamiento en función de la resistencia a compresión f_{cm} .

centro de losa asociada a esta aumentan, aunque no de forma lineal, dado que, del mismo gráfico puede observarse como la diferencia en la resistencia a punzonamiento es mayor al considerar incrementos en resistencias a compresión bajas.

A diferencia de cómo sucedía bajo variaciones de la energía de fractura, la curva Carga-Desplazamiento se modifica desde un principio, incluyendo la rama elástica, bajo modificaciones de la resistencia a compresión. La modificación de la rama elástica en incrementos de la resistencia a compresión responde al hecho de que el módulo elástico del hormigón depende de la misma f_{cm} , tanto en normativa como en la realidad. Este hecho se plasma debido a la continuidad impuesta durante la definición del modelo material (Sección 3.2.2).

La Figura 3.25 muestra el incremento de la resistencia a punzonamiento unitaria (unitaria respecto la resistencia del modelo de referencia) frente al incremento de la resistencia a compresión unitaria del hormigón. El ajuste realizado para el resultado confirma la no-linealidad del impacto de la resistencia a compresión sobre la resistencia a punzonamiento, mencionada en el párrafo anterior. Esta no-linealidad es un buen indicio de que modificando la resistencia a compresión se está modificando más de un parámetro definido en el modelo de manera indirecta.

Cabe destacar que dicha no-linealidad es más acusada que la producida a causa de la variación de la energía de fractura, analizada anteriormen-

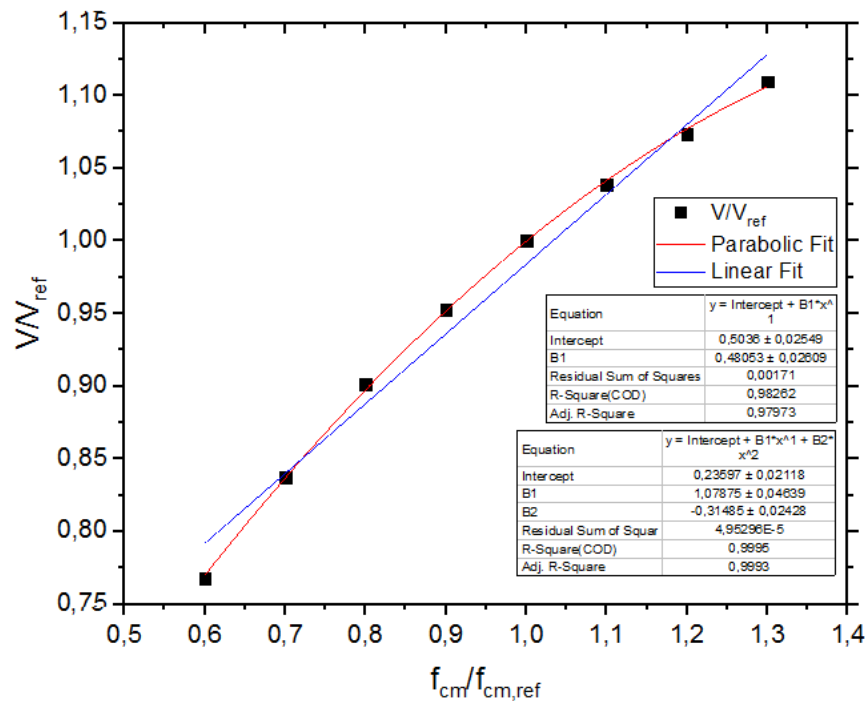


Figura 3.25: Respuesta del punzonamiento (unitario) frente al incremento (unitario) de la resistencia a compresión del hormigón, juntamente con un ajuste cuadrático y un ajuste lineal.

te, y casi despreciable. De este punto que se pueda decir que la relación punzonamiento-resistencia a compresión sí tenga un comportamiento parabólico.

Del mismo gráfico, si se toma el ajuste lineal (como primera aproximación), se observa que la influencia del incremento de la resistencia a compresión es el doble que la influencia de la energía de fractura (pendiente doble del ajuste lineal presentado sobre el de la Figura 3.23a).

Desde un punto de vista de los datos es cierto, aunque se ha de tomar con cierta cautela, dado que la resistencia a compresión influye en la definición de la energía de fractura (Ec.(3.10)), modificando así más de un parámetro indirectamente. Pese a ello, la influencia de la resistencia a compresión en el rango presentado tiene una influencia pequeña en la energía de fractura.

Influencia del ángulo de dilatancia

El ángulo de dilatancia (ψ) es un parámetro que se define en el contexto del modelo plástico del hormigón, presentado durante la definición del material (*Concrete Damaged Plasticity*).

De acuerdo con *Genikomsou y Polak* en [33], dado que el hormigón es un material frágil este conlleva grandes cambios de volumen, dadas las deformaciones inelásticas. Este fenómeno volumétrico se llama dilatancia, y esta, en el modelo plástico, se define mediante el ángulo de dilatancia.

Para materiales friccionales (como el hormigón) la dilatancia se controla mediante una función de fluencia, la cual en el modelo plástico utilizado, es:

$$G(\sigma) = \sqrt{(\epsilon\sigma_{t0} \tan(\psi))^2 + \bar{q}^2} + \frac{1}{3}I_1 \tan(\psi) \quad (3.17)$$

De acuerdo con [33] varios autores han sugerido valores para el ángulo de dilatancia, los cuales van sobre un rango de $31^\circ \rightarrow 42^\circ$. Vista la influencia que dicho parámetro puede tener en los resultados, es interesante analizar, para el modelo propio, exactamente qué sucede, con el futuro propósito de poder calibrar correctamente el modelo una vez realizados los ensayos experimentales.

La Figura 3.26 y el Cuadro 3.7 presentan los resultados de las simulaciones tras variar el parámetro ψ .

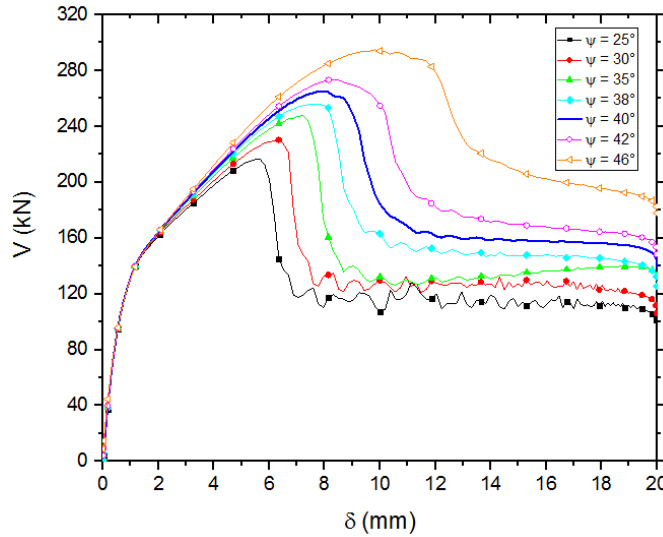


Figura 3.26: Curvas Carga-Desplazamiento en función del ángulo de dilatancia.

En la Figura 3.26 se puede apreciar como, al igual que la energía de fractura, el ángulo de dilatancia afecta a la rama lineal post-elástica, siendo esto coherente con el hecho que el ángulo de dilatancia se define para la

Carga máxima (kN)	
$\psi = 25^\circ$	216.5
$\psi = 30^\circ$	230.38
$\psi = 35^\circ$	247.65
$\psi = 38^\circ$	256.18
$\psi = 40^\circ$	265.17
$\psi = 42^\circ$	273.52 4
$\psi = 46^\circ$	295.03

Cuadro 3.7: Resultados de carga máxima para los distintos valores de ψ estudiados

función de fluencia, y por ende el hormigón ya no debería estar bajo un régimen elástico.

De la misma figura también se puede apreciar que, a diferencia de G_f , el ángulo de dilatancia controla tanto la rigidez del comportamiento plástico como en qué momento la rotura sucede, otra vez, consistente con el hecho de que el ángulo de dilatancia define en parte la función de fluencia.

Finalmente, el ángulo de dilatancia parece generar bastante variación de resultados en función de su valor, por ello es uno de los parámetros a tener en cuenta durante la simulación de futuros casos, como en el ajuste de las simulaciones una vez realizados los ensayos experimentales.

3.4. Resumen

En este capítulo se han presentado las definiciones realizadas sobre un modelo numérico capaz de reproducir el fenómeno del punzonamiento, utilizando el paquete de cálculo ABAQUS, y con el objetivo dual de sentar las bases que definen el modelo numérico necesario para la investigación de la resistencia a punzonamiento conjuntamente con tracciones en el plano, y de predecir el comportamiento de la losa definida en una campaña experimental.

Para la definición del modelo ha sido necesario contar con una geometría inicial y, paralelamente, la definición de unas propiedades materiales mediante relaciones tensión-deformación uniaxial y características propias de cada material utilizado (Módulo de Young, etc.).

Contando con las definiciones pertinentes es posible configurar un modelo para simular el punzonamiento en losas de hormigón, tal y como se presenta en la Sección 3.2.3.

Tras realizar las simulaciones es posible analizar la respuesta de la losa de hormigón sometida a una carga controlada mediante desplazamiento,

principalmente mediante la curva Carga-Desplazamiento, dado que esta es un resultado directo en campañas experimentales.

De los resultados se observan que:

- La resistencia a punzonamiento máxima obtenida es de 265.17kN, con una flecha asociada a la carga en el centro de la losa, de 7.95mm. De la curva Carga-Desplazamiento se puede observar la coherencia de los resultados, mostrando una rama elástica, fisurada y post-pico pertinentes.

- Dichos resultados, al no tener información experimental propia, se han comparado con ensayos experimentales y numéricos anteriores (*Adetifa y Polak* [30] y *Genikomsou y Polak* [33]).

A partir de la comparación se puede observar que el modelo reproduce de manera adecuada la resistencia a punzonamiento (a falta de ensayos experimentales) con una diferencia del 4.81 % entre los resultados numéricos y experimentales (presentados en [30]).

- A partir de las comparaciones anteriores se ha detectado la relevancia que juegan las condiciones de contorno, siendo una de las razones por la que el resultado propuesto no presenta exactamente el mismo comportamiento presentado por las referencias de la literatura.
- A partir de las deformaciones plásticas principales puede detectarse la dirección del plano de fisuración, el cual dibuja un cono, confirmando así la habilidad del modelo para capturar la fenomenología del punzonamiento. Adicionalmente, la geometría de la rotura que se aprecia posterior a la carga pico tiene forma circular, tal y como se esperaba.
- Las armaduras presentan plastificación fruto de la flexión en el centro de la losa, sobre una carga de 219kN, la cual representa el 83 % de la carga de rotura. Ello explicaría las adecuadas prestaciones de las losas bidireccionales, las cuales se benefician de un estado de flexión y cortante tridimensionales, que a su vez permiten redistribuir los esfuerzos internos.
- Se ha comparado el resultado obtenido con el modelo de referencia y la normativa EN1992-1-1. El modelo de referencia (de *Marí et al.* (2018)) predice de manera más adecuada la misma resistencia a punzonamiento, presentando una desviación del 12.3 % a la desviación del 22.6 % a partir de los resultados presentados por el EC2.
- Adicionalmente, dada la utilización de elementos finitos para obtener el comportamiento de la losa a punzonamiento, se ha realizado un pequeño análisis paramétrico con la intención de detectar, por un lado

parámetros que pueden influir en el resultado de futuras simulaciones, y el poder analizar la respuesta de la losa bajo la modificación de propiedades mecánicas como la energía de fractura o la resistencia a compresión media del hormigón.

De estos dos parámetros mecánicos, se ha podido verificar la relación casi-lineal que tienen estos con la resistencia a punzonamiento, con pendientes de 0.25 y 0.5 para la energía de fractura y la resistencia a compresión respectivamente.

Capítulo 4

Efecto de las tracciones en la resistencia a punzonamiento

Una vez ha sido posible realizar un modelo numérico capaz de capturar la resistencia a punzonamiento en losas de hormigón planas, se está en disposición de simular y analizar la resistencia a punzonamiento conjugada con tracciones aplicadas en el plano y en una sola dirección.

Estas simulaciones permiten cumplir con el principal objetivo de este trabajo, basado en analizar la resistencia a punzonamiento bajo tracciones en el plano medio de la losa, conjuntamente con el proceso mecánico de rotura. A su vez, dicho análisis, da soporte a la ya mencionada campaña experimental que se está llevando a cabo en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la ETS de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona.

Dada la previsión de incorporar las tensiones en el plano sobre el modelo original, no es necesaria ninguna modificación o redefinición geométrica o material del modelo propuesto, más allá de las propias tracciones, las cuales no se han definido en el Capítulo 3.

De este modo, la estructura del capítulo se simplifica a definir cómo las tracciones se introducen en la losa para, posteriormente, proceder a la presentación de los resultados numéricos.

Adicionalmente, *Marí et al.* en [38] desarrollaron el *Compression Cord Capacity Model (CCCM)* con ciertas modificaciones respecto al modelo inicial para incluir el efecto de cargas axiales de tracción que modifican la resistencia a cortante y el cual podría extrapolarse a losas.

En el presente se está estudiando, por parte de los autores citados, el incorporar el efecto de los axiles del mismo modo a las losas, y por ello también es interesante, al margen de presentar los modelos numéricos obtenidos, comparar estos con los resultados de la nueva formulación desarrollada por

Antonio Marí (UPC) y transmitida personalmente al autor de este trabajo.

4.1. Introducción y efecto de las tracciones en el plano

La resistencia a punzonamiento en losas planas, tal y como se ha visto en el Capítulo 2, se ha investigado en profundidad durante el último medio siglo. Pese a ello, nula o poca investigación se ha realizado sobre la resistencia a punzonamiento bajo cargas puntuales y tracciones contenidas en el plano de la losa.

Cabe destacar que, pese a no haber sido investigado, las tracciones en el plano combinado con el punzonamiento no es un fenómeno inusual, sino que puede suceder bajo circunstancias más comunes de lo pensado. Por ejemplo, sin ir más lejos, podría suceder el punzonamiento de la losa superior de un puente cajón frente a una carga puntual, durante servicio, en las zonas de apoyos, donde existen momentos negativos; o durante construcción, en cualquier punto longitudinal bajo momentos negativos, y por ende un tablero bajo posibles tracciones.

Tal y como se ha expuesto varias veces, este hecho ha motivado el inicio de una campaña experimental con el propósito de analizar dicha fenomenología.

Considerando la mecánica de rotura de una losa plana bajo tracciones contenidas en el plano, parece lógico pensar que la capacidad a punzonamiento de la misma se reduce frente a una losa sin tracciones.

La presencia de dichas tracciones genera varios fenómenos, como por ejemplo:

- La profundidad del eje neutro se reduce, conduciendo a una menor profundidad de la cabeza comprimida del hormigón, que es el elemento resistente frente a punzonamiento
- Las tracciones reducen el efecto de confinamiento en la dirección radial, haciendo que no se desarrolle la máxima capacidad del hormigón a cortante (base del CCCM)
- Parte de la armadura dispuesta se destina a combatir los esfuerzos de tracción y no los momentos que aparecen

4.1.1. Formulación analítica del fenómeno

Considerando la formulación analítica que se está desarrollando en el presente por *Marí et al.*, y que se ha transmitido personalmente al autor,

esta puede incorporar las tracciones en el plano.

Marí *et al.*, autores del *Compression Chord Capacity Model (CCCM)* sugirieron formulaciones complementarias al CCCM para poder considerar el efecto de esfuerzos axiles en vigas, de acuerdo con [38]. Dicha expresión, en la que se consideran las tracciones modifica la profundidad del eje neutro, de manera que:

$$\frac{x}{d} = \frac{x_0}{d} \left(1 - 0,1 \frac{T_d}{M} \right) = \frac{x_0}{d} \left(1 - 0,1 \frac{t_d}{m} \right) \quad (4.1)$$

Donde

t_d es la tracción en el plano de la losa en la sección transversal analizada y por metro lineal de losa

m es el momento por metro lineal de losa en la sección transversal analizada

Adicionalmente,

$$t = \frac{T}{b} = \frac{T}{T_{crit}} \frac{T_{crit}}{b} = \frac{T}{T_{crit}} \frac{f_{ct} \cdot b \cdot d}{b} = \frac{T}{T_{crit}} f_{ct} d \quad (4.2)$$

$$m = m_{cr} = \frac{f_{ct} h^2}{6} = \frac{f_{ct} d^2}{6} \left(\frac{h}{d} \right)^2 \approx 0,2 f_{ct} d^2 \quad (4.3)$$

Asumiendo una relación $h/d=1.1$ y reformulando la Ec.(4.1) utilizando las expresiones (4.2) y (4.3), la profundidad relativa del eje neutro se puede escribir tal y como muestra la Ec.(4.1), probando la influencia de las tracciones sobre el eje neutro.

$$\frac{x}{d} = \frac{x_0}{d} \left(1 - 0,5 \frac{T}{T_{cr}} \right) \quad (4.4)$$

Considerando la formulación del modelo de referencia presentada en el Capítulo 2, el CCCM para losas planas, es posible incorporar la tracción en el plano de la losa en las ecuaciones de equilibrio que presenta una cuña de hormigón limitada por las fisuras (Figura 2.19).

Reformulando el equilibrio, negligiendo los momentos tangenciales (M_φ) e incorporando la tracción impuesta, se puede llegar a las expresiones Ec.(4.5) a (4.7), resentadas gráficamente en la Figura 4.1.

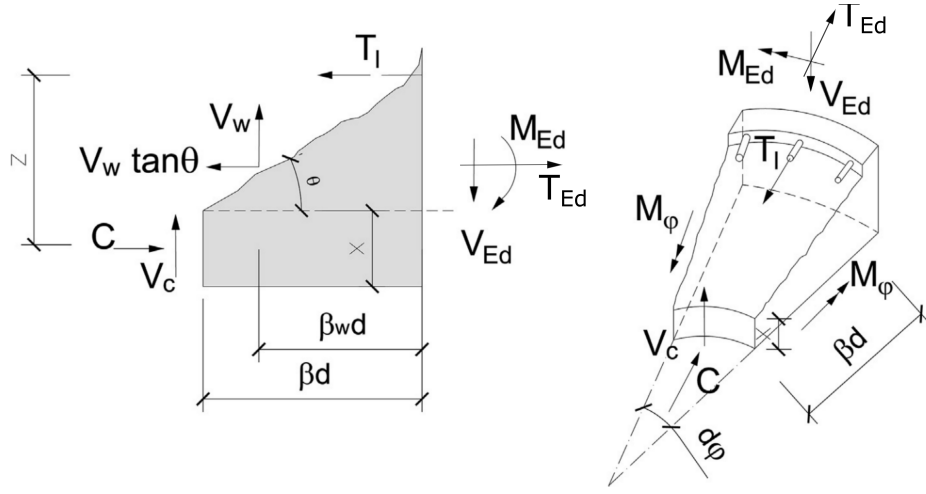


Figura 4.1: Equilibrio de fuerzas en una cuña de hormigón limitada por fisuras radiales y tangenciales

$$C = T_l + V_w \tan(\theta) - T_{Ed} \quad (4.5)$$

$$V_{Ed} = V_c + V_w \quad (4.6)$$

$$Cz = M \frac{r_{crack}}{r} + V_c \beta d + V_w \beta_w d (\tan(\theta) + \cot(\theta)) - T_{Ed} \left(d - \frac{h}{2} \right) \quad (4.7)$$

Asumiendo una distribución triangular en las compresiones del hormigón ($z = d - x/3$), la tensión radial en la profundidad crítica, situada a $\lambda = 0,425x$, es de:

$$C = 0,5\sigma_{c,max}x \quad (4.8)$$

$$\sigma_c = \lambda\sigma_{c,max} = \frac{2\lambda C}{x} = \frac{2\lambda}{x(d - x/3)} \left[m_{crack} \frac{r_{crack}}{r_{crit}} + V_c \beta d + V_w \beta_w d (\tan(\theta) + \cot(\theta)) - T_{Ed} \left(d - \frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.9)$$

Se puede apreciar que la Ec.(4.9) es muy similar a la Ec.(2.18) de la formulación de referencia, presentada en la Sección 2.1.3, excepto por las tracciones incorporadas anteriormente.

Considerando de nuevo el proceso iterativo llevado por *Marí et al.* en [11] sobre la Ec.(4.10), se puede obtener la expresión (4.11), la cual es prácticamente lineal sobre x/d y el ratio de tensiones.

$$v_c = \frac{V_c}{f_{ctm}bd} = 0,682\xi \frac{x}{d} \sqrt{1 - \frac{\sigma_r + \sigma_y}{\sigma_1} + \frac{\sigma_r \sigma_y}{\sigma_1^2}} \quad (4.10)$$

$$v_{ct} = \frac{V_c + V_w}{f_{ctm}u_{crit}d} = \xi \left(1,125 - 0,85 \frac{T}{T_{crit}} \right) \frac{x}{d} + 0,425 \quad (4.11)$$

Cabe destacar que la formulación obtenida es solo válida para la dirección traccionada. Si la dirección ortogonal a la traccionada no presenta ninguna carga en el plano (como es el caso de estudio) han de ponderarse las Ecs.(4.11) y (2.20), siendo la segunda expresión la resistencia a punzonamiento para un caso sin tracciones (Sección 2.1.3). De esta manera:

$$v_{c,total} = \frac{v_{ct}}{2} + \frac{v_c}{2} = \frac{V_{ct} + V_c}{2f_{ctm}u_{crit}d} = v_c - 0,425\xi \frac{T}{T_{crit}} \frac{x}{d} \quad (4.12)$$

4.2. Definiciones geométricas y numéricas adicionales

La geometría de la losa, tal y como se ha introducido anteriormente, no sufre ningún cambio especial, dado que en diseño inicial de esta ya se consideró la incorporación de las tracciones en el plano desde un principio. Así pues, la armadura y geometría es la introducida en la Sección 3.2.1. La Figura 4.2 muestra la losa sobre la que se analizará la resistencia a punzonamiento mediante ensayos experimentales.

La única incorporación respecto la losa definida en la Sección 3.2.1 son los elementos que permiten transmitir las tracciones impuestas a la losa. Estos consisten en 5 barras roscadas de acero por lado, utilizadas normalmente para la unión postesa en estructuras (barras *Dywidag GEWI*). A estas se les une dos placas de acero con las que se puede repartir la tensión sobre el hormigón de manera aceptable. Dicho elemento se presenta en la Figura 4.3.

Considerando la definición de la simulación, para poder incorporar el efecto de las tracciones en el modelo, se ha simplificado el mecanismo de tracción, para así, no incorporar nuevos elementos y complejidades en el material y, a su vez, poder utilizar el modelo definido inicialmente sin modificaciones, sino simplemente adjuntando alguna definición adicional (no se

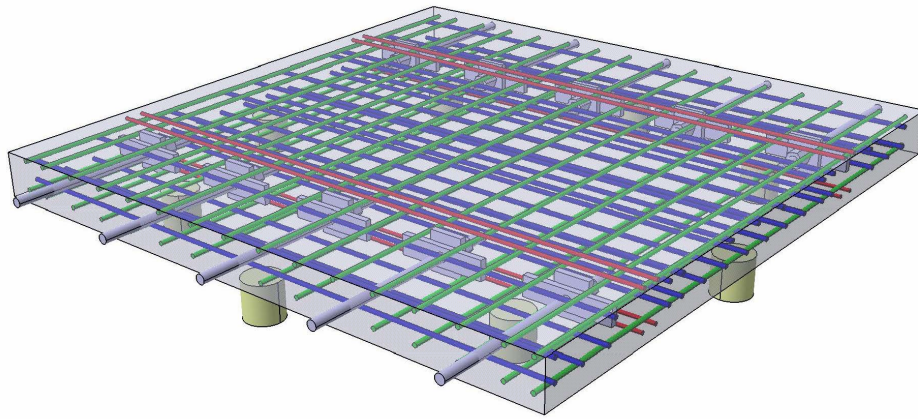


Figura 4.2: Losa introducida en la Sección 3.2.1 incorporando los elementos que transmiten la tracción

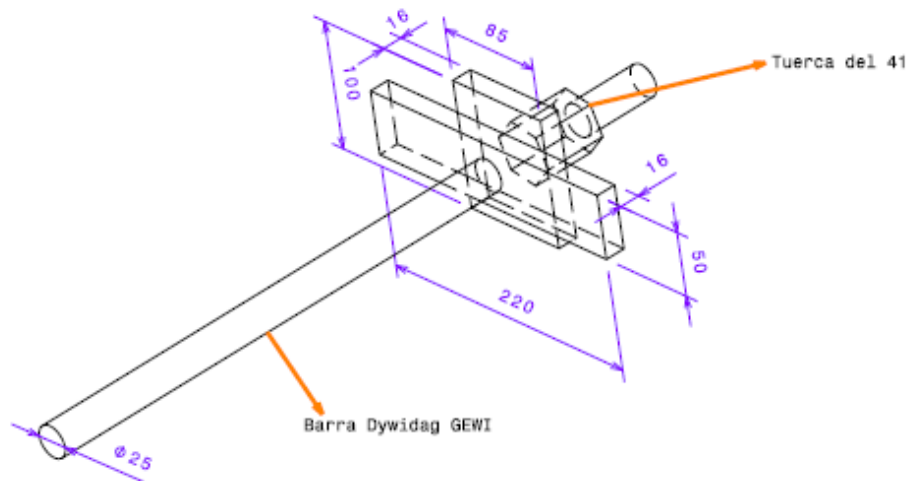


Figura 4.3: Representación con dimensiones del aparato destinado a transferir las tracciones impuestas en el plano al hormigón

modifica lo ya definido), simplificando así el proceso de definición del modelo.

Las tracciones se definen sobre el hormigón como un conjunto de presio-

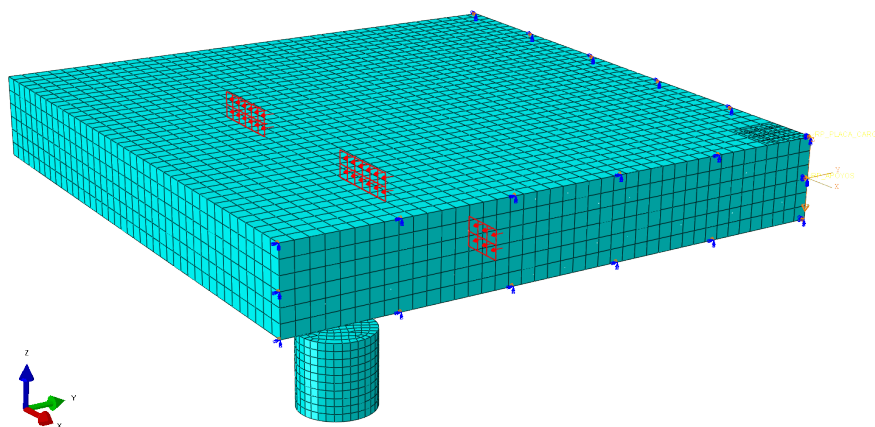


Figura 4.4: Modelo numérico incorporando las tracciones en el plano.

nes ejercidas en superficies internas, las cuales coinciden de manera aproximada con las placas que ejercen las tracciones en los ensayos experimentales. La Figura 4.4 muestra el cuarto de modelo simulado (definido en el capítulo anterior) con la superficie sobre la cual se aplica la carga distribuida, en la misma dirección que las tracciones reales.

La aplicación de las tracciones, en el curso de la simulación, se sitúa posterior a la imposición de la gravedad en el modelo y anterior al inicio de la carga aplicada por la placa de carga (bajo control del desplazamiento).

El método más sencillo para definir la superficie de carga y las presiones aplicadas es utilizando el modelo con la malla ya definida y, a partir de esta, mediante las coordenadas de los nodos necesarios, definir las superficies de carga. De esta manera, se provee de cierta flexibilidad al análisis paramétrico, dado que no se cierra la puerta a investigar las tracciones sobre mallas distintas a la propuesta de referencia.

Eso deriva, por otro lado, en que la superficie la cual reproduce la placa no tenga exactamente la misma proyección, sino que esta sea una superficie rectangular sencilla y sensiblemente distinta en dimensiones (dado que se ha de acomodar a las dimensiones de la malla).

Considerando la tensión límite, definida en el Apéndice-B en función de las dimensiones y el armado, se puede introducir en el modelo mediante una presión distribuida uniformemente en función de la superficie correspondiente a las “placas ficticias” del modelo. Así pues, considerando lo anterior:

$$T_{lim} = 713,648kN \quad (4.13)$$

$$P = \frac{T_{lim}}{2 \sum S_{placa,i}} \quad (4.14)$$

Cabe decir que el número 2 que aparece en el denominador de la Ec.(4.14) se justifica dado que las tensiones se reproducen para media losa (en ancho) dada la simetría y $S_{placa,i}$ solamente corresponde a cada una de las superficies del modelo (no las reales) y por ende a la mitad de las superficies que actúan en la losa completa.

Con el objetivo de adquirir el máximo conocimiento posible, del fenómeno combinado de punzonamineto y tracciones aplicadas en el plano, las simulaciones se realizan de manera paramétrica, en la que el valor modificado es la tensión (presión en el modelo) aplicada, con un rango de 0 % a 150 % de la tensión límite definida, en incrementos del 10 %.

4.3. Resultados

Una vez realizadas las simulaciones correspondientes a los distintos niveles de tracción aplicada, se analizan de los resultados y el análisis correspondiente de estos.

Más allá de presentar solamente las curvas Carga-Desplazamiento resultantes, se realiza una comparación entre los resultados numéricos y los resultados obtenidos mediante la formulación modificada de *Marí et al.* conjuntamente con las expresiones normativas del *Eurocódigo 2*, el cual permite la introducción de tensiones contenidas en el plano.

4.3.1. Resultados numéricos

La Figura 4.5 y el Cuadro 4.1 muestran los resultados obtenidos sobre la resistencia a punzonamiento frente una variación de las tracciones en el plano.

De la familia de curvas Carga-Desplazamiento presentadas se pueden apreciar varios fenómenos.

Considerando la carga máxima obtenida, a medida que aumenta la carga de tracción, estando dentro del límite marcado por T_{lim} , la respuesta de la losa evoluciona de manera lineal, donde simplemente se reduce la resistencia a punzonamiento de una manera constante.

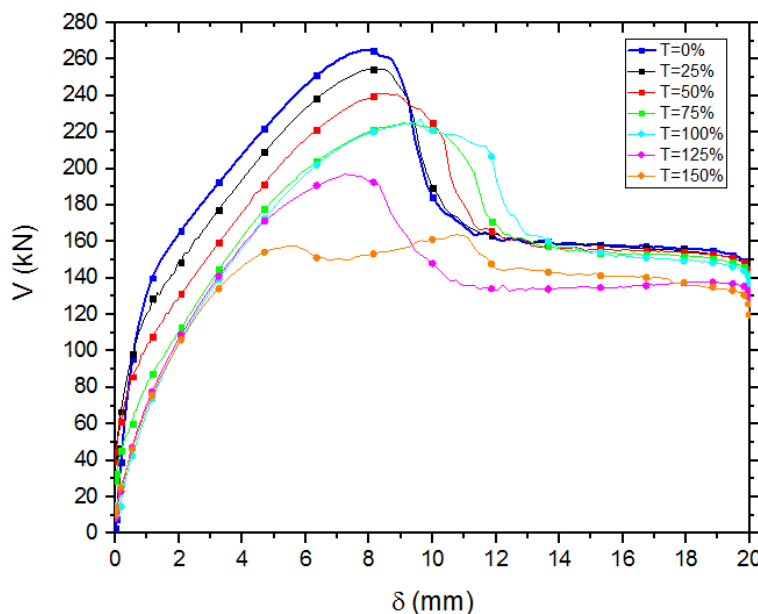


Figura 4.5: Curvas Carga-Desplazamiento para la losa de referencia bajo distintos niveles de tracción contenida en el plano

	Carga máxima (kN)	Flecha asociada (mm)
T=0 % de T_{lim}	265.172	7.95
T=10 % de T_{lim}	260.06	7.95
T=20 % de T_{lim}	257.5	7.95
T=25 % de T_{lim}	254.68	8.14
T=30 % de T_{lim}	253.23	8.5
T=40 % de T_{lim}	247.9	8.32
T=50 % de T_{lim}	241.2	8.5
T=60 % de T_{lim}	232.43	8.5
T=70 % de T_{lim}	226.92	8.88
T=75 % de T_{lim}	225.08	9.06
T=80 % de T_{lim}	223.15	9.06
T=90 % de T_{lim}	219.83	8.88
T=100 % de T_{lim}	227.18	9.62
T=110 % de T_{lim}	210.58	8.14
T=120 % de T_{lim}	207.12	8.32
T=125 % de T_{lim}	197.07	7.23
T=130 % de T_{lim}	197.1	7.59
T=140 % de T_{lim}	183.39	7.05
T=150 % de T_{lim}	163.73	5.5*-10.75

Cuadro 4.1: Resultados Carga máxima-flecha para cada uno de los estados de tracción simulados

Tal y como se aprecia a partir de las curvas, dicha disminución en la resistencia máxima a punzonamiento se desencadena en la carga de fisuración y no en la rama plástica, siendo esta la que se desplaza de manera lineal al

aumentar las tracciones. Así pues, al aumentar sucesivamente las tracciones se obtiene cada vez una rama elástica más corta.

Dicho fenómeno está en sintonía con lo expuesto en el Capítulo 3 sobre el inicio de la fisuración justo en la transición entre la rama elástica y la rama post-elástica. Al aumentar las tracciones en el hormigón, previo a la aplicación carga puntual, parte de la resistencia a tracción de este se destina a combatir las tracciones y dejando, de esta manera, menor resistencia capaz de combatir bajo régimen elástico la flexión generada por la carga puntual.

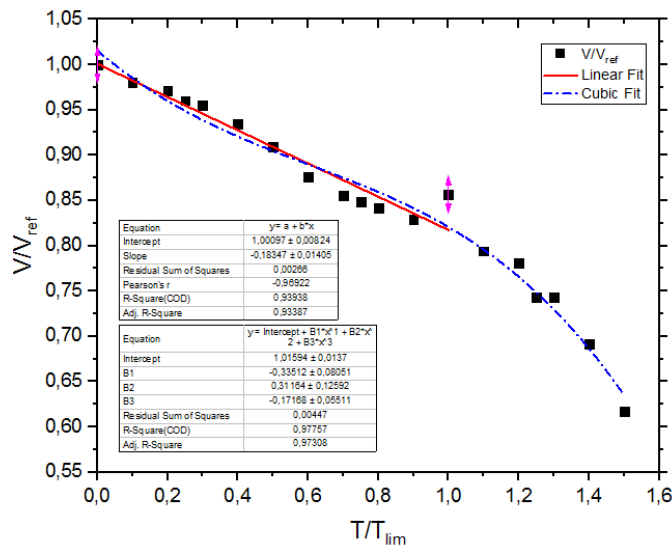
Bajo tracciones en el plano iguales a la límite, el régimen elástico se consume completamente. Una vez superadas las tracciones límite, la reducción de la carga máxima es fruto de la reducción del régimen fisurado (post-elástico). Esta reducción en la carga máxima parece obedecer una proporción mayor a la lineal, en comparación con situaciones con $T \leq T_{lim}$, y se justificaría con el hecho que se parte de una sección completamente fisurada, y por ende no existe hormigón capaz de resistir a tracción.

En lo que respecta a las rigideces que presentan los regímenes elástico y post-elástico, se puede observar que estas no cambian, independientemente de las tracciones aplicadas siempre y cuando se esté bajo tracciones inferiores a la límite (de fisuración), mostrando así ramas elásticas y post-elásticas paralelas para varios niveles de tracción.

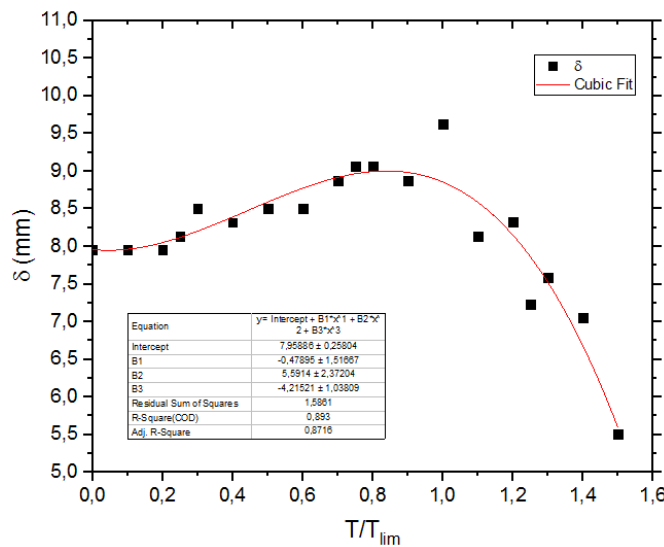
Al incrementar las tracciones en el plano, la rigidez de la rama fisurada no parece cambiar. Pese a ello, a partir de unas tracciones sensiblemente inferiores a la límite, en el último tramo de la rama post-elástica, justo antes de la carga pico, se puede apreciar una reducción en la rigidez más acusada y prolongada que para casos con tracciones inferiores (del orden de $T = 0,5T_{lim}$). Esto indicaría una plastificación completa del acero previo al punzonamiento, conduciendo así a una transformación hacia una rotura por flexo-punzonamiento.

Este último fenómeno, de transformación de una rotura por punzonamiento a rotura por flexo-punzonamiento, se puede observar con claridad con el cambio en la curva post-pico, en la que su pendiente (negativo) se ve suavizado al aumentar las tracciones.

Considerando las flechas obtenidas para la resistencia a punzonamiento máxima, y bajo tracciones en el plano sobre un rango de $T \geq 0,5T_{lim}$, se puede observar como al aumentar las tracciones, las flechas incrementan y, a su vez, la rotura parece volverse más dúctil. Este fenómeno está alineado con el argumento de que, al aumentar las tracciones, se logra una plastificación cada vez más temprana de la armadura, transformando la rotura de punzonamiento en una rotura por flexo-punzonamiento. El hecho de que, bajo armaduras plastificadas, la rotura deja de ser puramente a punzonamiento se ha comprobado en la literatura.



(a) Ajuste lineal (Rojo) para $T \leq T_{lim}$ y ajuste cúbico (Azul) para el completo de la relación.



(b) Ajuste cúbico para todo el rango de la relación.

Figura 4.6: Relaciones Carga máxima (unitaria)-Tracción aplicada (unitaria) (a) y Desplazamiento en cara máxima (unitario)-Tracción aplicada (unitaria) (b)

Si se analiza con detenimiento la relación entre la resistencia máxima a punzonamiento frente al incremento de las tracciones contenidas en el plano, la Figura 4.6a muestra como esta es lineal para tracciones inferiores a T_{lim}

y adquiere una forma parabólica, ajustada en este caso a una curva cúbica, para tracciones en el plano superiores a T_{lim} .

Esta curva complementa la afirmación anterior respecto a la reducción lineal de la resistencia a punzonamiento fruto de la disminución en la carga de plastificación (transición entre la rama elástica y rama post-elástica).

Por otro lado, la Figura 4.6b muestra la relación entre el desplazamiento asociado a la carga máxima y el incremento de las tracciones aplicadas en el plano.

De esta puede observarse un incremento en el desplazamiento a partir de tracciones del orden de 25 % T_{lim} hasta la tracción límite, tal y como se ha mencionado anteriormente, transformando el punzonamiento en flexo-punzonamiento, donde se refleja un claro incremento en la ductilidad de la rotura.

Bajo tracciones mayores a la límite, el desplazamiento asociado a la carga máxima disminuye de nuevo, motivado por una reducción de la rama post-elástica y no por razones de fragilidad propia del punzonamiento.

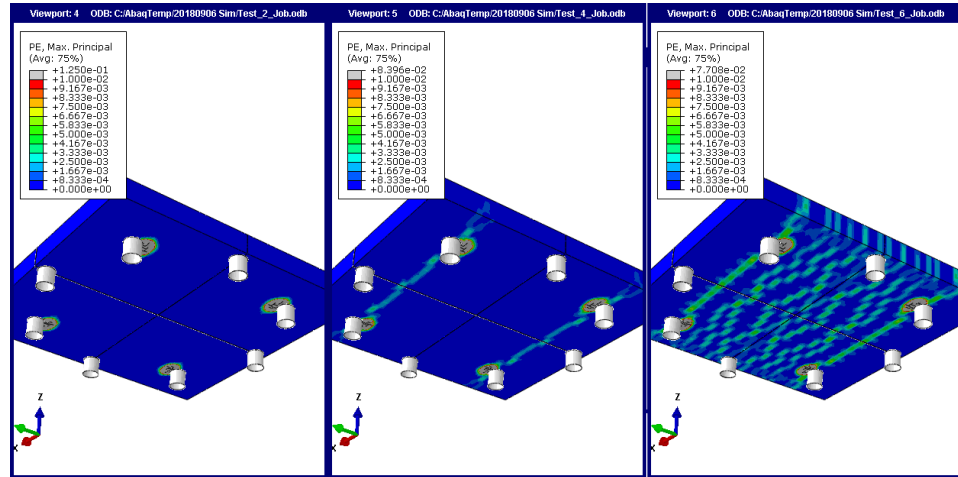


Figura 4.7: Patrón de fisuración a partir de las deformaciones plásticas máximas (tracciones) bajo unas tracciones en el plano de 50 % T_{lim} , 100 % T_{lim} y 150 % T_{lim} (de izquierda a derecha respectivamente).

La influencia de las tracciones en el plano medio de la losa, como ya se ha mencionado, actúa reduciendo la capacidad del hormigón para absorber tensiones propias de la flexión y, de este modo, reduciendo el régimen elástico propio de la losa sin tracciones, siempre y cuando las tracciones sean menores a la tracción límite.

Una vez superadas las tracciones de fisuración, el hormigón, previo a ser sometido a cargas puntuales, ya presenta una configuración completamente

fisurada, conduciendo directamente a una rama post-elástica.

En este sentido, la Figura 4.7 muestra el patrón de fisuración que aparece en la losa previo a cualquier carga propia del punzonamiento, bajo unas tracciones de 50 % T_{lim} , 100 % T_{lim} y 150 % T_{lim} (de izquierda a derecha respectivamente). En esta figura se presentan las deformaciones plásticas máximas (debidas a las tracciones), las cuales pueden sugerir un patrón global de fisuración. Para su interpretación, el color *azul* representa una deformación plástica igual a cero (está en régimen elástico).

Si se analiza cómo afectan las tracciones aplicadas a la carga de fisuración, como antes se ha mencionado, esta se ve reducida al aumentar las tracciones hasta las tracciones límite, a partir de las cuales la sección de la losa ya esta fisurada previo a la aplicación de la carga.

La Figura 4.8 muestra las deformaciones plásticas máximas (debidas a tracciones) en el paramento inferior para los casos de tracción en el plano de 0 % T_{lim} , 50 % T_{lim} , 100 % T_{lim} y 150 % T_{lim} justo en el momento en el que se inicia la fisuración en el hormigón, y por ello, se empieza la transición de la rama elástica a la rama plástica. Las cargas asociadas se muestran en el Cuadro 4.2.

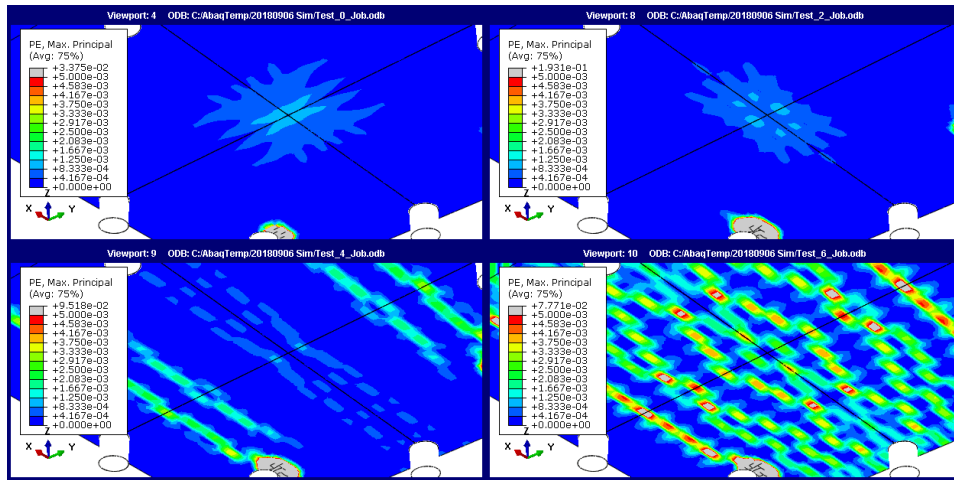


Figura 4.8: Deformaciones plásticas máximas (tracciones) en el momento en el que se inicia la fisuración del hormigón para las tracciones de 0 % T_{lim} , 50 % T_{lim} , 100 % T_{lim} y 150 % T_{lim} (de izquierda a derecha y arriba a bajo respectivamente)

La Figura 4.9 muestra las tensiones principales máximas (tracciones) que aparecen en el paramento traccionado en el instante de carga máxima.

De las tensiones en la figura presentada, puede apreciarse como, al incrementar las tracciones en el plano de la losa, estas tienden a tomar una forma más ortogonal y extenderse más en el plano horizontal. La Figura

	0 % T_{lim}	50 % T_{lim}	100 % T_{lim}	150 % T_{lim}
Carga de fisuración	136.5 kN	87.1 kN	15 kN	0 kN

Cuadro 4.2: Cargas de fisuración asociadas a las respectivas tracciones aplicadas en el plano.

4.9c, asociada a una tracción de 150 % T_{lim} , presenta una fisuración extendida en todo el ancho de la losa en la dirección perpendicular a las tracciones, asociadas a las mismas y desarrolladas ya desde un inicio (Figura 4.7). Esto conduce a pensar que la resistencia a flexión la acarrea, principalmente, una de las direcciones ortogonales, fruto de la plastificación temprana de la armadura en la dirección de las tracciones en el plano y, de este modo, reduciendo la resistencia a punzonamiento y transformando esta en una rotura a flexo-punzonamiento.

La Figura 4.10 muestra una comparativa en las tensiones de Von Mises para las armaduras en los respectivos instantes de carga máxima asociados a tensiones de 0 % T_{lim} , 50 % T_{lim} , 100 % T_{lim} y 150 % T_{lim} .

De la figura se puede apreciar como al aumentar las tracciones en el plano, más redondos exteriores, en la dirección paralela a las tracciones, han plastificado en el momento de carga máxima. Este hecho puede dar a pensar que, al aumentar las tracciones impuestas se genera un nivel tensional de partida (el de las propias tracciones) al que posteriormente se acumulan las tensiones debidas a la flexión.

Adicionalmente, al lograr una mayor plastificación de la armadura se puede lograr una respuesta Carga-Desplazamiento más dúctil, tal y como se ha comentado anteriormente.

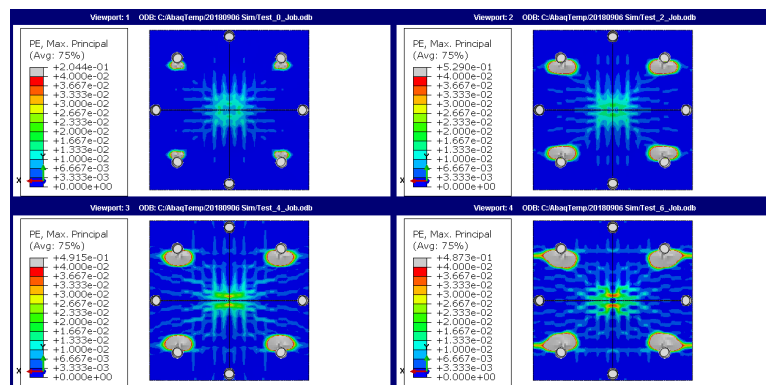


Figura 4.11: Representación de deformaciones plásticas tras la cara post-pico para tracciones aplicadas de 0 % T_{lim} , 50 % T_{lim} , 100 % T_{lim} y 150 % T_{lim} (de izquierda a derecha y de arriba a bajo). Estas muestran el patrón de fisuración post-rotura.

La Figura 4.11 muestra cómo se modifica el patrón de fisuraciones al incrementar las tracciones, transformándose de un círculo, para tracciones inferiores a la límite, a una elipse. Esta modificación en la geometría parece propiciada por la prefisuración que aparece en la losa al incrementar las tracciones en el plano.

Dicho fenómeno explicaría, mediante una mayor fisuración al incrementar las tracciones, porqué se incrementa el número de redondos que plastifican (Figura 4.10).

En el Apéndice-D se presenta una completa colección de imágenes representativas sobre el punzonamiento combinado con tracciones en el plano, las cuales muestran las tensiones de tracción que aparecen en el hormigón en función del nivel de carga y el nivel de tracciones en el plano.

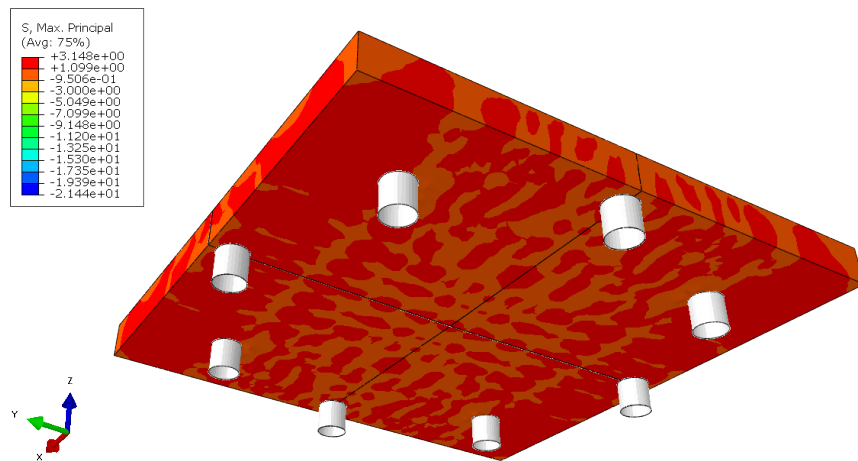
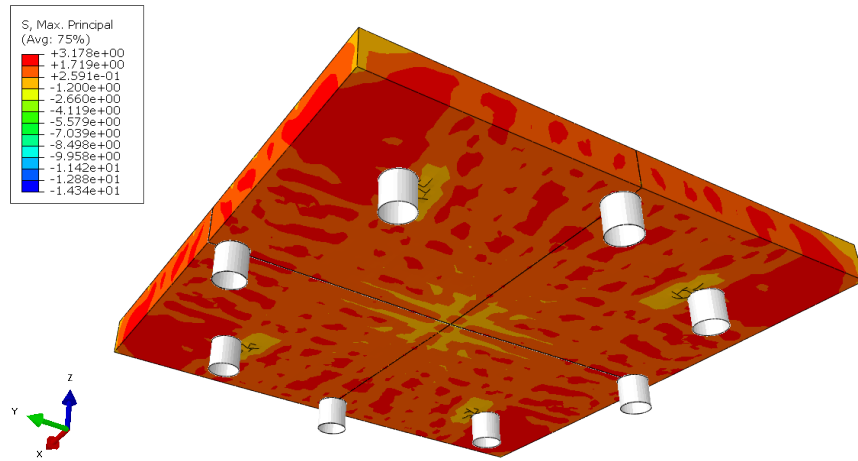
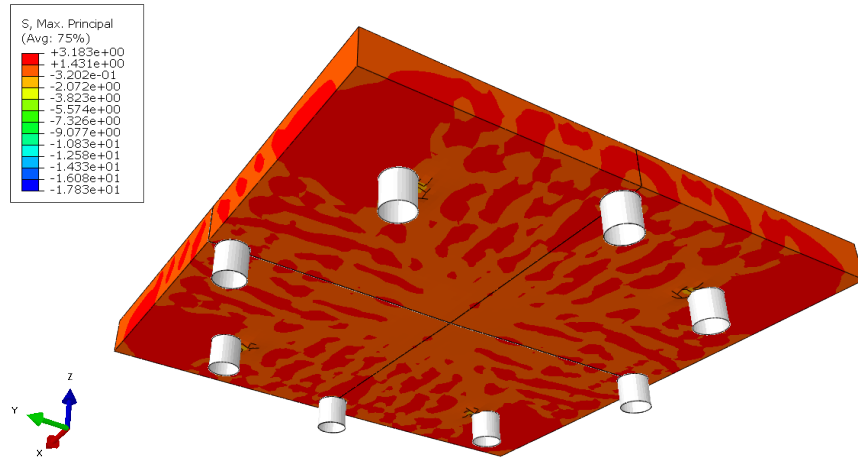


Figura 4.9: Tensiones principales máximas para los casos de carga con tracciones equivalentes al (a) 50 %, (b) 100 % y (c) 150 % de la tracciones límite.

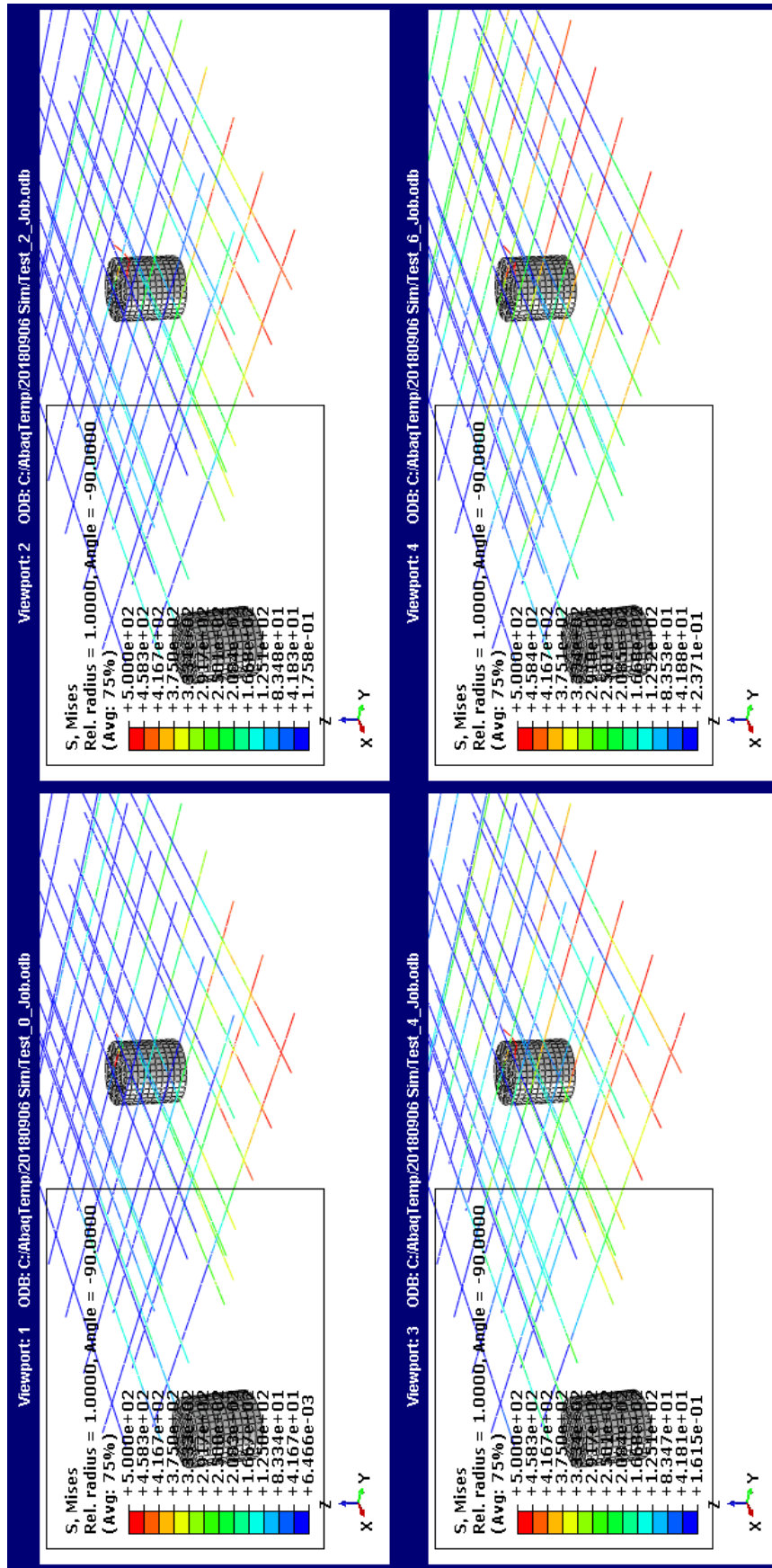


Figura 4.10: Tensión de Von Mises en las armaduras en el instante de carga máxima para las tracciones en el plano de 0 % T_{lim} , 50 % T_{lim} , 100 % T_{lim} y 150 % T_{lim} (de izquierda a derecha y de arriba a bajo).

4.3.2. Comparación entre resultados analíticos y numéricos

Parte del análisis de los resultados pasa por comparar estos con otras vías para el cálculo del punzonamiento combinado con tracciones paralelas al plano de la losa. Para ello, se utilizan dos formulaciones presentadas a lo largo del trabajo, el modelo de referencia, incorporando las modificaciones de *Marí et al.* para la consideración de las tracciones y, por otro lado, el *Eurocódigo 2*, el cual permite también la incorporación de tensiones (tanto de compresión como tracción) en las dos direcciones del plano.

Considerando los cálculos presentados en el Apéndice-B, para el cálculo de la resistencia a punzonamiento bajo tracciones en el plano, tanto para el modelo de referencia como para la formulación normativa, el Cuadro 4.3 recoge estos en función de la tracción aplicada frente a los resultados numéricos.

	Simulación (kN)	<i>Marí et al.</i> (kN)	Error (%)	EN1992-1-1	Error (%)
T=0 % de T_{lim}	265.172	230.13	13.21	205.26	22.6
T=10 % de T_{lim}	260.06	226.09	13.08	202.3	22.2
T=20 % de T_{lim}	257.5	222.05	13.77	199.33	22.58
T=30 % de T_{lim}	253.23	218.01	13.91	196.37	22.45
T=40 % de T_{lim}	247.9	213.97	13.69	193.4	21.98
T=50 % de T_{lim}	241.2	209.93	12.97	190.45	21.04
T=60 % de T_{lim}	232.43	205.89	11.42	187.48	19.34
T=70 % de T_{lim}	226.92	201.85	11.05	184.51	18.68
T=80 % de T_{lim}	223.15	197.81	11.36	181.55	18.64
T=90 % de T_{lim}	219.83	193.77	11.86	178.6	18.76
T=100 % de T_{lim}	227.18	189.73	16.49	175.63	22.69
T=110 % de T_{lim}	210.58	185.69	11.82	172.66	18
T=120 % de T_{lim}	207.12	181.65	12.3	169.7	18
T=130 % de T_{lim}	197.1	177.61	9.89	166.74	15
T=140 % de T_{lim}	183.39	173.57	5.35	163.77	10
T=150 % de T_{lim}	163.73	169.54	-3.55	160.8	1.78

Cuadro 4.3: Resultados de carga máxima de las ds formulaciones analíticas utilizadas, conjuntamente con el error que tienen frente al resultado simulado.

Al igual que en los resultados obtenidos en el Capítulo 3, ambas formulaciones presentan valores inferiores a la resistencia calculada mediante métodos numéricos, siendo de nuevo la predicción a partir de la formulación de referencia (CCCM modificada de *Marí et al.*) la que ofrece una mejor predicción, con aproximadamente una diferencia de diez puntos básicos entre ambas formulaciones.

Salvo el caso de $T = 150 \% T_{lim}$, ambas presentan una diferencia frente a los resultados numéricos casi constante, independientemente de la tracción aplicada. Esto podría llevar a pensar que el fenómeno de las tracciones externas se reproduce, en ambas formulaciones, de manera correcta dado que dicho error se mantiene.

Para realizar una comparación más fiel sobre si las formulaciones utilizadas capturan el fenómeno de las tracciones, más allá de diferencias globales que aparecen entre los resultados, es interesante comparar la resistencia a punzonamiento adimensional de cada uno de los resultados frente a la variación de las tracciones externas.

La Figura 4.12, muestra de manera gráfica dicha comparativa.

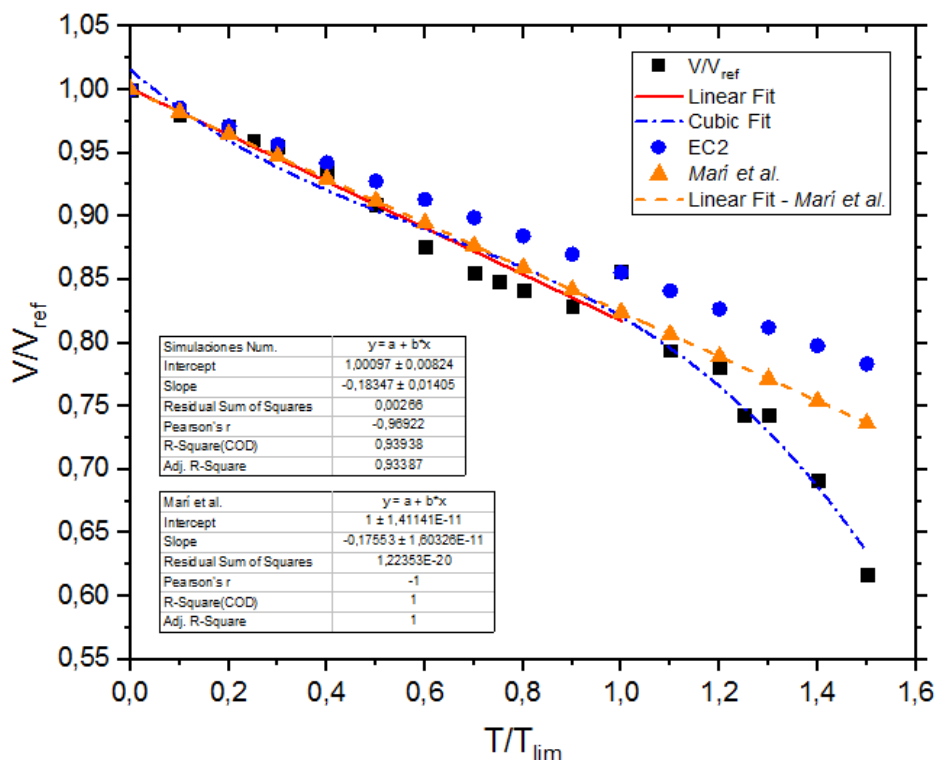


Figura 4.12: Relación Carga Unitaria - Tracciones exteriores Unitarias para los resultados numérico y analíticos.

Tal y como se puede apreciar de la figura presentada, la formulación de referencia modificada se ajusta a perfección al comportamiento que tiene la losa bajo el incremento de las tracciones externas. La formulación presentada en el Eurocódigo 2 tampoco presenta malos resultados, pese a la sencillez con la que se tratan las tensiones contenidas en el plano.

Por otro lado, ambas formulaciones no son capaces de capturar el comportamiento resistente de la losa una vez superada la tracción límite, dado que las expresiones analíticas sugieren una respuesta lineal frente al incremento de las tracciones, cuando en realidad tiene un carácter parabólico/cúbico. Este incremento de la diferencia entre resultados numéricos y analíticos pasado T_{lim} justifica porqué para tracciones elevadas el error en

la predicción de los modelos es menor, no porqué el modelo prediga mejor, sino porqué se salva la diferencia que presentan inicialmente cada familia de resultados.

4.4. Resumen

Tras verificar que el modelo numérico propuesto puede reproducir el fenómeno del punzonamiento, en este capítulo se han presentado las modificaciones necesarias para poder incorporar las tracciones en el plano combinadas con la carga concentrada.

Dichas modificaciones permiten analizar numéricamente el fenómeno combinado de tracciones en el plano y punzonamiento, permitiendo obtener información valiosa sobre este, y de esta manera, cumplir con uno de los objetivos principales de dar soporte a la campaña teórico-experimental desarrollada en la UPC.

Las simulaciones llevadas a cabo contemplan una variación incremental del 10 % de T_{lim} , partiendo de una configuración sin tracciones hasta una configuración donde se aplica el 150 % de T_{lim} .

Adicionalmente, se ha llevado a cabo una comparación de los resultados conjuntamente con el modelo de referencia utilizado a lo largo de este trabajo, el CCCM modificado (de *Marí et al.*) y el Eurocódigo 2. El modelo de referencia presenta un ajuste muy bueno del comportamiento de la losa bajo tracciones.

De manera más específica, de los resultados se puede observar:

- La resistencia a punzonamiento de la losa se ve linealmente reducida frente al incremento de las tracciones aplicadas sobre esta, hasta un valor máximo de $T = T_{lim}$. Superadas las tracciones de fisuración, la caída en la resistencia se acentúa frente al incremento de las tracciones, aproximándose a decrecimiento parabólico.
- Para tracciones en el plano inferiores a la tracción de fisuración, las rigideces elástica y post-elástica que presentan las curvas Carga-Desplazamiento son las mismas, indiferentemente del nivel de tracción aplicado. A medida que la tracción se acerca a la tracción límite y la supera, solamente la rigidez post-elástica se reduce justo antes de llegar a la resistencia máxima.
- La carga de fisuración, la cual marca la transición entre la rama elástica y la rama post-elástica se reduce al incrementar las tracciones. Esta se reduce de manera equivalente a la reducción en la resistencia máxima a punzonamiento.

- A medida que se incrementan las tracciones en el plano, el desplazamiento asociado a la carga máxima aumenta, siempre que las tracciones sean inferiores a las tracciones límite. Tras superar las tracciones límite, el desplazamiento en la carga máxima desciende debido al acortamiento en la rama post-elástica.
- Se puede apreciar que, al incrementar las tracciones en el plano, las armaduras longitudinales del paramento traccionado plastifican bajo cargas inferiores. Este hecho conduce a una rotura que se transforma del punzonamiento al flexo-punzonamiento. A su vez, dicha plastificación argumenta el punto anterior.
- Comparando las formulaciones analíticas presentadas a lo largo del trabajo (CCCM modificado y EC2) se puede ver como el modelo modificado del CCCM (de *Marí et al.*) describe de manera muy satisfactoria la reducción en la resistencia a punzonamiento debido al incremento de las tracciones en el plano, siempre y cuando $T \leq T_{lim}$.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de este trabajo final de máster se han podido analizar varios aspectos del fenómeno del punzonamiento, al cual son especialmente susceptibles las losas planas bajo cargas concentradas (columnas en forjados y cimentaciones o cargas puntuales en tableros de puentes) y, respondiendo al objetivo principal, se ha analizado la acción combinada de punzonamiento y tracciones aplicadas en el plano de la losa.

Antes de realizar cualquier ensayo experimental es fundamental conocer bien la mecánica del problema. Así pues, respondiendo al objetivo final, de dar soporte a la campaña experimental que se está desarrollando en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la UPC, se ha analizado la resistencia mecánica de una losa de hormigón armado a punzonamiento bajo cargas transversales y sometidas también a cargas de tracción en el plano, mediante el uso de simulaciones numéricas realizadas con el programa de elementos finitos ABAQUS 6.14.

El análisis de la rotura por punzonamiento ha dado lugar a una estructuración del trabajo que puede resumirse en:

- Definición de un modelo material y numérico capaz de reproducir efectos no-lineales.
- Análisis y verificación del modelo con resultados experimentales de punzonamiento disponibles en la literatura, en losas sin ninguna tracción aplicada en el plano.
- Análisis cualitativo y cuantitativo de la influencia de las tracciones en el plano sobre la resistencia a punzonamiento en losas.
- Comparación de los resultados numéricos para distintos valores de tracción con las predicciones de la formulación de referencia basada en la contribución de la cabeza comprimida (CCCM) (*Marí et al. (2018)*)

y la formulación propuesta en la normativa EN1992-1-1.

De los trabajos realizados, pueden extraerse las siguientes conclusiones fundamentales:

1. Conclusiones derivadas del estado del conocimiento elaborado.
 - La presencia de tracciones en el propio plano de losas sometidas a cargas que pueden provocar punzonamiento no es un hecho inusual, tanto en estructuras de obra pública (losas de puentes continuos bajo las cargas concentradas de vehículo en la zona de momentos negativos), como en edificación (forjados de edificios sometidos a empujes horizontales con efecto diafragma).
 - En el caso de vigas sometidas a cortante, sí que existen estudios sobre la influencia de las tracciones en la resistencia a cortante, la cual disminuye a medida que aumentan aquellas, aunque de forma moderada. Dado que el punzonamiento puede asimilarse a una rotura por cortante de carácter tridimensional, alrededor del pilar, cabe esperar que las tracciones en el plano también influyan en resistencia a punzonamiento.
 - No se ha encontrado, en la literatura consultada, estudio alguno relevante sobre la influencia de las tracciones en la resistencia a punzonamiento, lo que justifica la investigación planteada.
2. Conclusiones derivadas de la modelización numérica realizada y de los resultados obtenidos para losas sin tracciones.
 - Los resultados para el caso de punzonamiento sin tracciones son coherentes con los resultados experimentales. La curva Carga-Desplazamiento obtenida presenta tres ramas: la elástica, la fisurada y la de post-pico, cuyos valores en términos de carga, desplazamiento y rigidez son comparables a los experimentales.
 - Pese a lo anterior, se observa que la rama elástica obtenida en las simulaciones numéricas es ligeramente más rígida que la experimental. En la misma línea, la carga de fisuración, en la que finaliza la rama elástica, es también mayor a la experimental. Ello se justifica debido a la existencia de tracciones e incluso fisuras previas a la carga, debidas a tensiones térmicas (durante el curado) y de la retracción.
 - La carga última obtenida coincide con la experimental con un error del + 4.81 %, lo cual es razonable, considerando la complejidad del fenómeno simulado y la existencia de otras predicciones numéricas, sobre la misma losa, que presentan mayor error.

- El desplazamiento obtenido numéricamente en el centro de la losa, por otro lado, no coincide con el resultado experimental, con una desviación de 4mm (-33.2 % de error). Una razón, que justifica la diferencia entre resultados, es la distinta configuración de apoyos, lo cual puede conducir a diferencias sustanciales.
 - La resistencia a punzonamiento obtenida también se ha confrontado a los resultados obtenidos mediante la formulación de referencia (CCCM) y la norma europea EN1992-1-1. De la comparación se puede concluir que ambas formulaciones, aún sin utilizar coeficientes de seguridad, predicen una resistencia menor a la resultante de las simulaciones. Pese a la diferencia, la formulación del CCCM muestra un error del 13.2 % frente al 22.6 % que presenta el Eurocódigo 2, sugiriendo una mejor predicción frente a la norma europea.
3. Conclusiones derivadas de la modelización numérica realizada y de los resultados obtenidos para losas con tracciones.
- Se constata que el aumento de las tracciones en el plano reducen la resistencia última y aumentan la deformación asociada a la carga máxima, transformando la rotura eminentemente frágil (propia del punzonamiento) en una rotura progresivamente más dúctil.
 - La reducción en la carga máxima, obtenida bajo la aplicación de las tracciones límite (de fisuración), es del 14.3 %, mientras que la reducción obtenida bajo una carga de tracción de 1.5 veces la carga límite es del 38.2 %.
 - De las reducciones que presenta la resistencia al punzonamiento, se aprecia que la minoración entre $T = 0$ y $T = T_{lim}$ es lineal y que, al superar las tracciones límite, la reducción en la resistencia se acentúa, ajustándose correctamente a una curva cúbica.
 - En el rango de tracciones comprendido entre 0 y la tracción límite, la rama elástica se ve sucesivamente reducida al aumentar el valor de las tracciones (reducción de la carga de fisuración), sin modificar prácticamente la extensión rama fisurada o las rigideces de ambas ramas elástica y fisurada. Esto sucede dado que, la rama elástica se define a partir de la resistencia a tracción del hormigón, la cual se ve reducida al aumentar las tracciones ya que parte del hormigón se destina a combatir únicamente las tracciones. Una vez superada la tracción límite, el acero es el componente mayoritariamente resistente, de aquí, que la reducción en la resistencia sea mayor que lineal.
 - La geometría de la fisuración que presentan las simulaciones, al aumentar las tracciones, tras alcanzar la carga máxima varía. La

geometría de partida es una fisura crítica de forma circular (como muestran las simulaciones y la literatura) y esta se transforma en una elipse al incrementar las tracciones, con eje principal la dirección perpendicular a estas.

- Las formulaciones analíticas presentadas se han comparado con las predicciones numéricas y para varios valores de tracciones impuestas en el plano. Se puede concluir que el modelo CCCM, pese a mostrar cierta desviación en la resistencia a punzonamiento, captura de manera excelente la influencia de la tracción sobre el plano de la losa, en el rango comprendido por debajo de la tracción límite.
4. Conclusiones derivadas del análisis paramétrico realizado para las simulaciones sobre punzonamiento sin tracciones contenidas en el plano de la losa
- Se ha realizado un análisis de la influencia de parámetros numéricos, así como materiales. Las variables analizadas son el tamaño de mallado, la energía de fractura del hormigón, la resistencia a compresión uniaxial del hormigón y el ángulo de dilatación (de la definición plástica del hormigón).
 - De los resultados presentados, y de acuerdo con la literatura, puede observarse una gran sensibilidad del modelo numérico al tamaño de malla. Solamente valores de malla de 20 ± 2 mm han reproducido de manera aceptable la resistencia a punzonamiento. Ello es debido a la dificultad en convergir al afinar la malla y a la consecuente obtención de bandas de fisuración más estrechas.
 - Observando los resultados obtenidos bajo la modificación de la energía de fractura (G_f) se comprueba que la influencia de este es casi lineal. El incremento normalizado de la energía de fractura frente al incremento normalizado de la resistencia a punzonamiento se ajusta prácticamente a una recta, con pendiente 0.24.
 - Por otro lado, la influencia en la variación en la resistencia a compresión del hormigón tiene un comportamiento sensiblemente menos lineal que la energía de fractura, siendo un ajuste parabólico el que representa mejor la influencia (unitaria) de la resistencia a compresión. Si se toma un ajuste lineal (continúa siendo un buen ajuste) la relación resistencia a compresión unitaria frente a la resistencia a punzonamiento unitaria es de 0.48, prácticamente el doble que la influencia de la energía de fractura.
 - La variación en el ángulo de dilatación también presenta un gran impacto, tanto sobre la resistencia máxima como el desplazamiento asociado. El ángulo de dilatación es uno de los parámetros que

definen la superficie de fluencia del hormigón, ello demuestra en las curvas carga-desplazamiento presentadas modificando el binomio carga-desplazamiento, así como la pendiente post-rotura. Dado el gran impacto en las curvas, es uno de los parámetros a controlar en calibraciones futuras.

Considerando todos los resultados presentados a lo largo del trabajo, es posible proveer del soporte necesario para desarrollar la investigación teórica y experimental iniciada en la UPC sobre el efecto combinado de las tracciones en el plano y el punzonamiento. Desde un punto de vista teórico, se han confirmado las predicciones aportadas por el CCCM modificado en rangos de tracción en el plano inferiores a la tracción de fisuración. Adicionalmente, se ha aportado una carga máxima y comportamiento de la losa importantes en el diseño de la campaña experimental.

Este trabajo deja la puerta abierta a futuras investigaciones y trabajos sobre la influencia de las tracciones contenidas en el plano medio de losas susceptibles a punzonamiento, por ejemplo:

- Es importante proseguir con la validación del modelo numérico, más específicamente, ampliando el estudio paramétrico realizado al caso de losas sometidas bajo distintos niveles de tracciones contenidas en el plano.
- Para probar la completa validez de las relaciones propuestas sobre la influencia de las tracciones sobre la resistencia a punzonamiento es necesario expandir las comparaciones a otras geometrías, modificando espesores, cantidad geométrica de armadura, luces libres, etc.
- Uno de los métodos no intrusivos para la mejora de la resistencia a punzonamiento es el refuerzo mediante Polímeros Reforzados con Fibras (FRP del inglés *Fiber Reinforced Polymer*). Parece interesante analizar en profundidad el mecanismo resistente que ofrece la adhesión de las láminas de FRP, considerando que el punzonamiento presenta dependencia de la profundidad de la fibra neutra y esta aumenta con la disposición del refuerzo con FRP, aumentando la contribución del hormigón comprimido sobre la resistencia frente a esfuerzos cortantes.
- Dada la influencia que pueden tener las tracciones en la resistencia a punzonamiento, con el claro ejemplo de cargas concentradas sobre tableros de puentes, puede ser interesante extender la investigación de las tracciones a la resistencia a cortante en losas como, por ejemplo, la rotura a cortante que se puede producir en el ala de un puente con sección en cajón en zonas de apoyo (momentos negativos).

Bibliografía

1. Ngo, D. T. Punching shear resistance of high-strength concrete slabs. *Electronic Journal of Structural Engineering* **1**, 52-59. ISSN: 14439255 (2001).
2. Brewbooks (flickr nickname). *Cantilever Bridge Constrction - Sound Transit* 2007. <https://www.flickr.com/photos/brewbooks/394853504/in/photostream/>.
3. CEB/fib Task Group - Utilization of concrete tension in design. *Punching of structural concrete slabs - Bulletin 12* inf. téc. (Federation Internationale du Béton (fib), 2001), 314.
4. Fernández Ruiz, M., Mirzaei, Y. y Muttoni, A. Post-punching behavior of flat slabs. *ACI Structural Journal* **110**, 801-811 (2013).
5. CEN - European Commitee For Standarization. *Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1 : General rules and rules for buildings* 230 (2004).
6. Fédération Internationale du Béton (fib). *Model Code 2010 - Volume 1* Final draf, 357 (2012).
7. Schellhammer, J. y col. Another Look at the Collapse of Skyline Plaza at Bailey's Crossroads, Virginia. *Journal of Performance of Constructed Facilities* **27**, 354-361 (2013).
8. Gardner, N. J., Huh, J. y Chung, L. Lessons from the Sampoong department store collapse. *Cement and Concrete Composites* **24**, 523-529 (2002).
9. Alexander, S. y Simmonds, S. *Shear-Moment Transfer in Slab Column Connections* inf. téc. (Department of Civil Engineering - University of Alberta, Edmonton, Alberta, 1986), 114.
10. Ericsson, S. *Punching Shear in Reinforced Concrete Slabs Supported on Edge Steel Columns* Tesis de Máster (Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2010), 148.
11. Marí, A., Cladera, A., Oller, E. y Bairán, J. M. A punching shear mechanical model for reinforced concrete flat slabs with and without shear reinforcement. *Engineering Structures* **166**, 413-426 (2018).

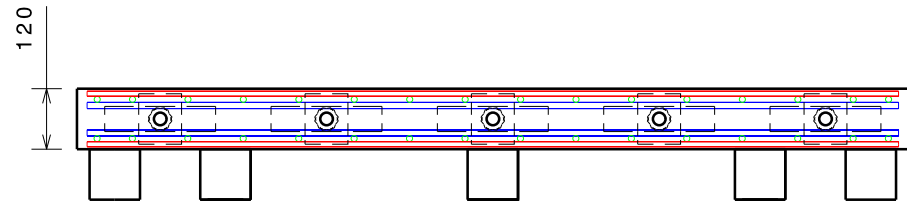
12. Guandalini, S. y Muttoni, A. *Punching tests on symmetrical reinforced concrete slabs without shear reinforcement* inf. téc. (IS-BETON, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004), 78.
13. Broms, C. E. *Concrete Flat Slabs and Footings: Design Method for Punching and Detailing for Ductility* Tesis doct. (Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweeden, 2005), 137.
14. Muttoni, A. Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement. *ACI Structural Journal* **105**, 440-450 (2008).
15. Benedetto, L. F. *Numerical models of punching shear of reinforced slabs without shear reinforcement* Tesis de Máster (ETSECCPB - UPC y Politecnico di Tornio, 2018).
16. Gustafsson, P. e Hillerborg, A. Sensitivity in Shear Strength of Longitudinal Reinforced Concrete Beams to Fracture Energy of Concrete. *ACI Structural Journal* **85**, 286-294 (1988).
17. Hillerborg, A., Modéer, M. y Petersson, P. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research* **6**, 773-782 (1976).
18. Hallgren, M. *Punching shear capacity of reinforced high strength concrete slabs* inf. téc. (Department of Structural Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweeden, 1996), 206.
19. Lantsoght, E. *Literature review of punching shear in reinforced concrete slabs* inf. téc. (School of Civil y Environmental Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 2009), 93.
20. Menétrey, P. *Analytical Model for punching strength prediction en International Workshop on Punching Shear Capacity of RC Slabs* (Stockholm, Sweeden, 2000), 190-199.
21. Menétrey, P. Synthesis of punching failure in reinforced concrete. *Cement and Concrete Composites* **24**, 497-507 (2002).
22. Menétrey, P. Relationship between flexural and punching failure. *ACI Structural Journal* **95**, 412-419 (1998).
23. Fédération Internationale du Béton (fib). *Model Code 2010 - Volume 2* Final draf, 377 (2012).
24. Muttoni, A. y Schwartz, J. Behavior of Beams and Punching in Slabs without Shear Reinforcement. *IABSE Colloquium* **62**, 703-708 (1991).
25. Marí, A., Bairán, J. M., Cladera, A. y Oller, E. Shear Design and Assesment of Reinforced and Prestressed Concrete Beams Based on Mechanical Model. *Journal of Structural Engineering* **142**, 04016064 (2016).

26. Cladera, A. y col. The compression chord capacity model for the shear design and assessment of reinforced and prestressed concrete beams. *Structural Concrete* **17**, 1017-1032 (2016).
27. ACI Committee 318. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318M-14)* 519 (2014).
28. Nielsen, C. V., Zhang, W., Alves, L. M., Bay, N. y Martins, P. A. F. en *Modeling of Thermo-Electro-Mechanical Manufacturing Processes* 3-10 (2013).
29. Dassault Systèmes Simulia Corp. *Abaqus Analysis User's Manual Volume 2: Analysis* (Providence, RI, USA, 2012).
30. Adetifa, B. y Polak, M. A. Retrofit Of Interior Slab Column Connections For Punching Using Shear Bolts. *ACI Structural Journal* **2**, 268-274 (2005).
31. Broo, H., Lundgren, K. y Plos, M. *A guide to non-linear finite element modelling of shear and torsion in concrete bridges* inf. téc. (Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2008), 37.
32. Wahalathantri, B.L.Thambiratnam, D., Chan, T. y Fawzia, S. A Material Model for Flexural Crack Simulation in Reinforced Concrete Elements Using Abaqus. *Proceedings of the First International Conference on Engineering, Designing and Developing the Built Environment for Sustainable Wellbeing*, 260-264 (2011).
33. Genikomsou, A. S. y Polak, M. A. Finite element analysis of punching shear of concrete slabs using damaged plasticity model in ABAQUS. *Engineering Structures* **98**, 38-48 (2015).
34. Dere, Y. y Koroglu, M. A. Nonlinear FE Modeling of Reinforced Concrete. *International Journal of Structural and Civil Engineering Research* **6**, 71-74 (2017).
35. Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S. y Oñate, E. A Plastic-Damage Model for Concrete. *International Journal of Solids and Structures* **25**, 299-329 (1989).
36. Lee, J. y Fenves, G. L. Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures. *Journal of Engineering Mechanics* **124**, 892-900 (1998).
37. Dassault Systèmes Simulia Corp. *Abaqus Theory Manual* (Providence, RI, USA, 2012).
38. Marí, A., Bairán, J. M. y Cladera, A. *Effects of axial forces and prestressing on the shear strength of structural concrete members* en *VII Congreso Internacional de Estructuras - ACHE* (ACHE, A Coruña, 2017), 1-10.

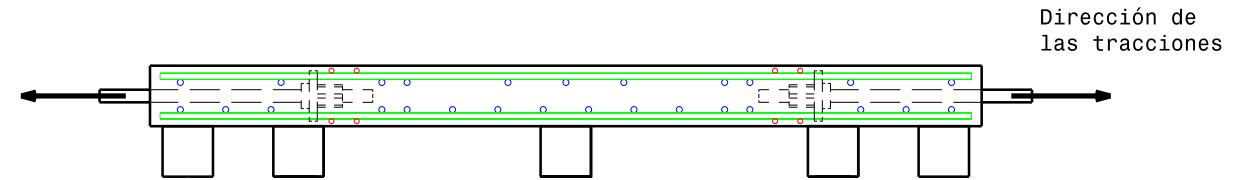
39. Comisión Permanente del Hormigón. *Instrucción de Hormigón estructural EHE-08* 702 (Ministerio de Fomento, Madrid, 2011).

Apéndice A

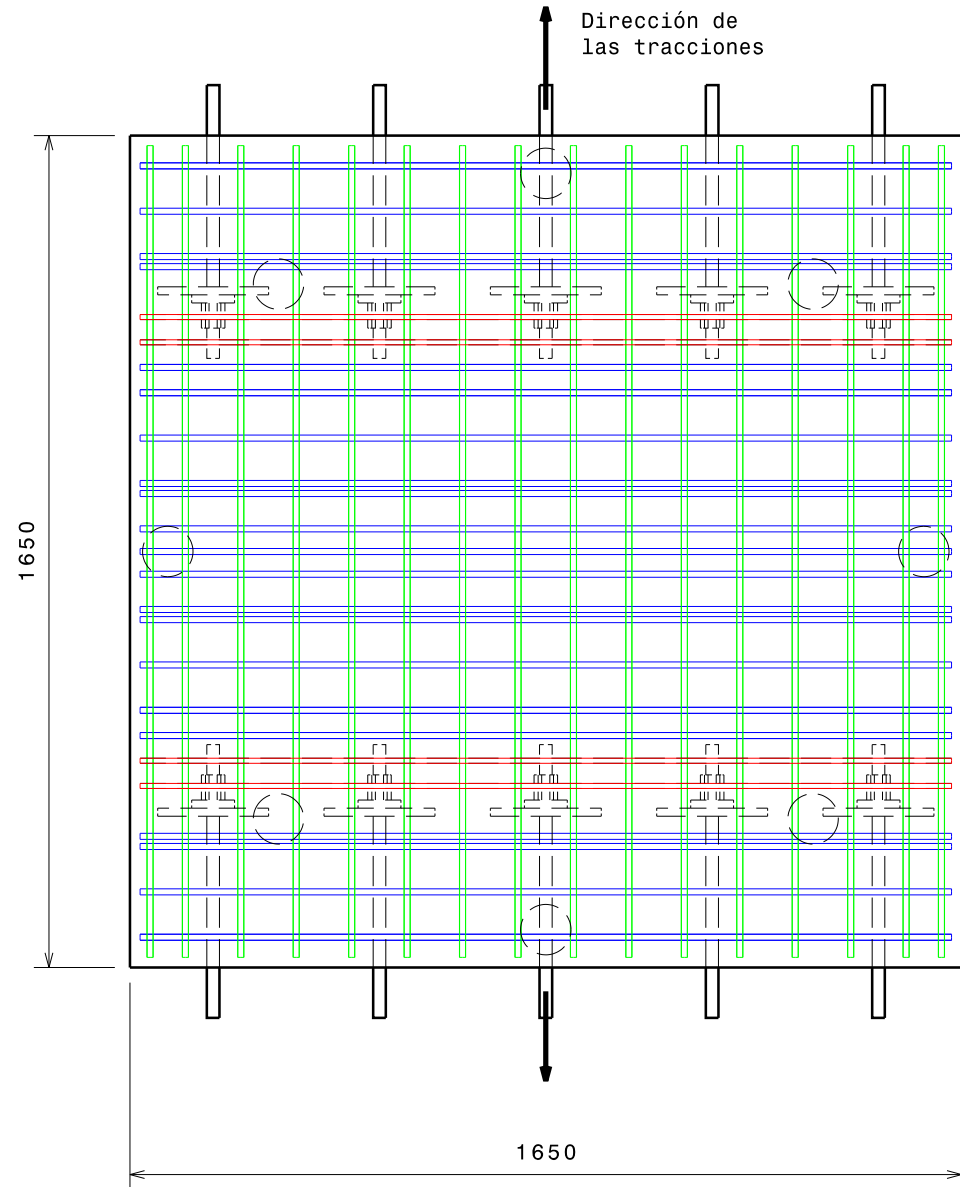
Planos de la geometría y el armado de la losa



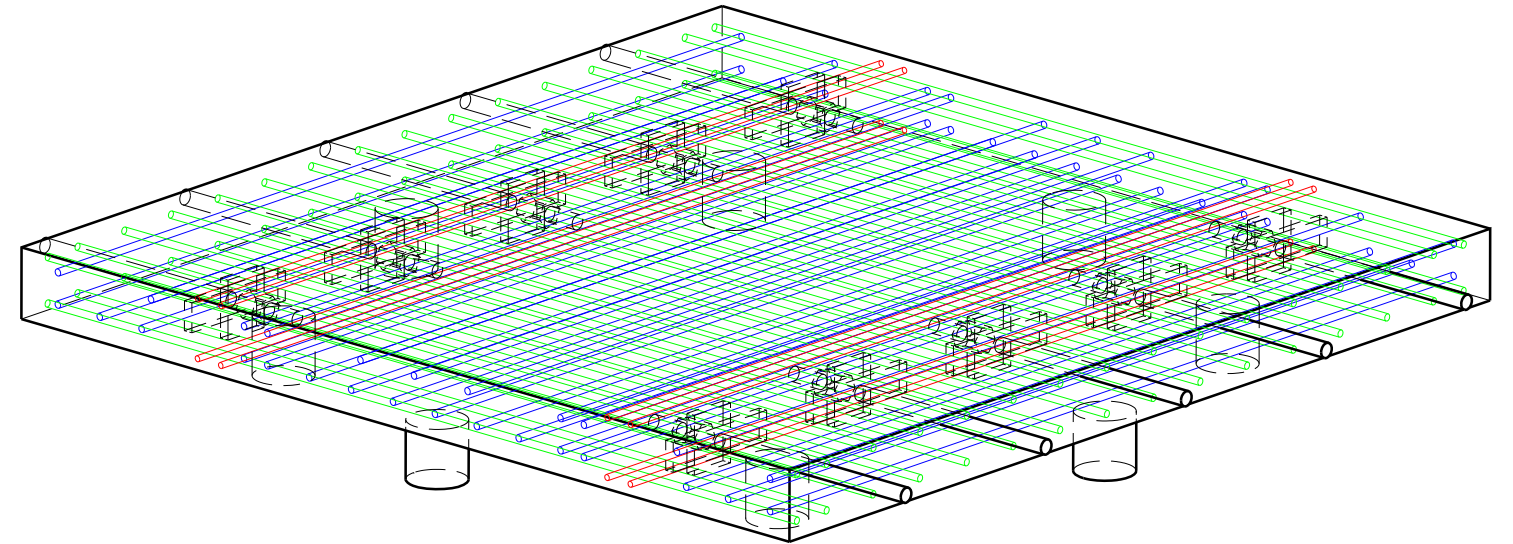
Front view
Scale: 1:15
Units: mm



Left view
Scale: 1:15
Units: mm

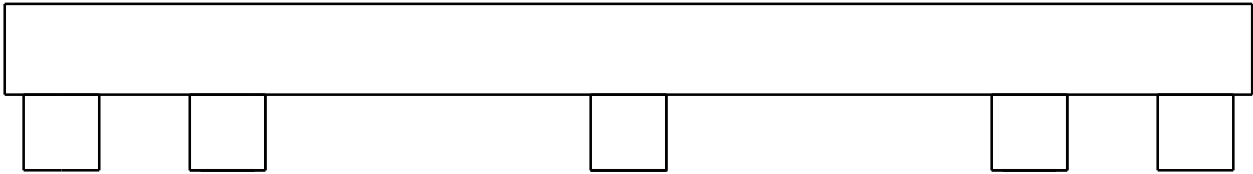


Top view
Scale: 1:15
Units: mm

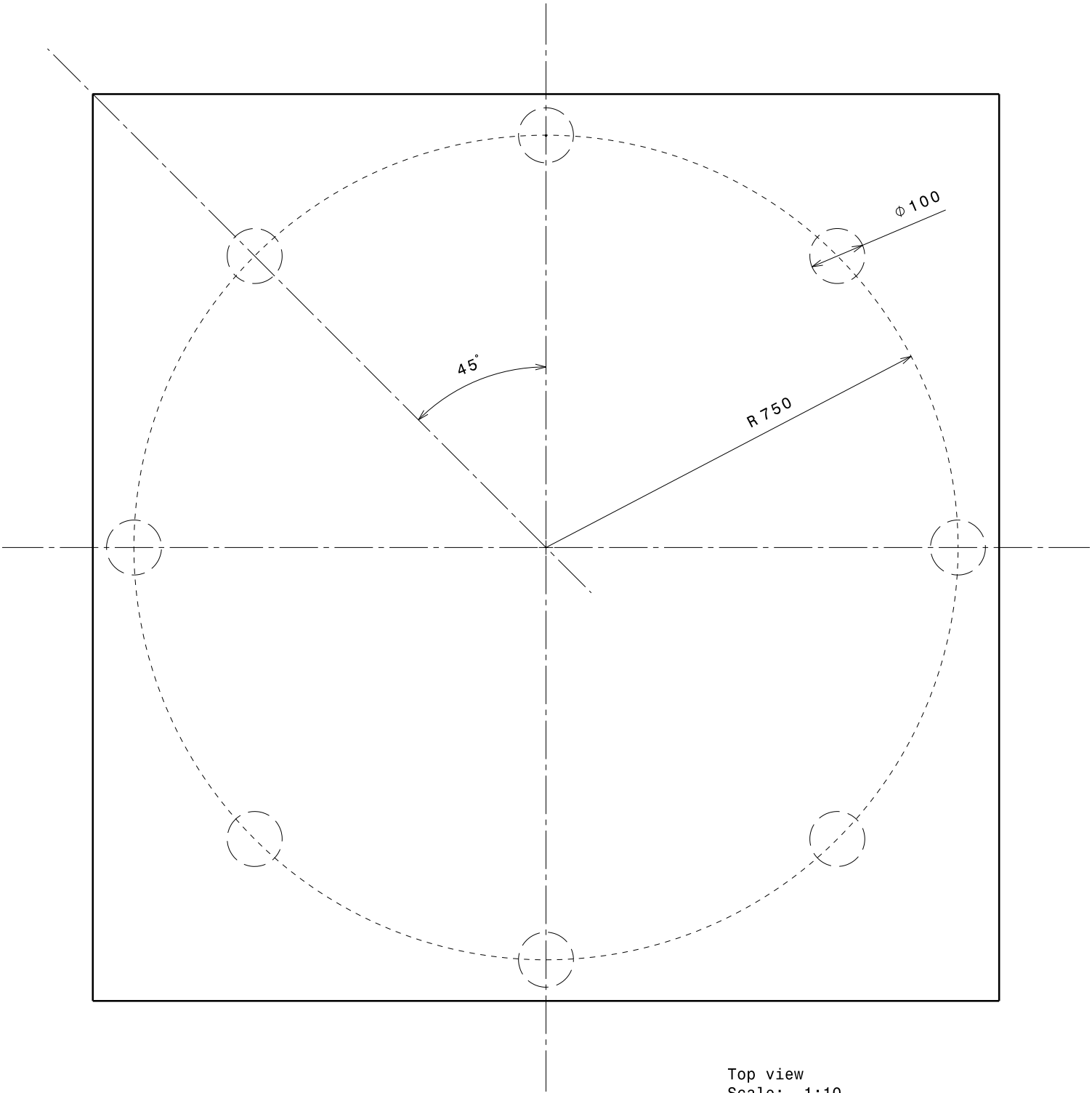


Isometric view
Scale: 1:12

Plano A1.1	Nombre Plano Proyecciones generales de la losa	Autores Magí Domingo Tarancón Pablo Gonzalo Fernández
	Documento Planos de la geometría y el armado de la losa	

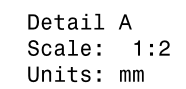
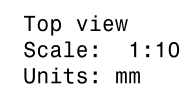
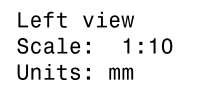
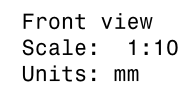


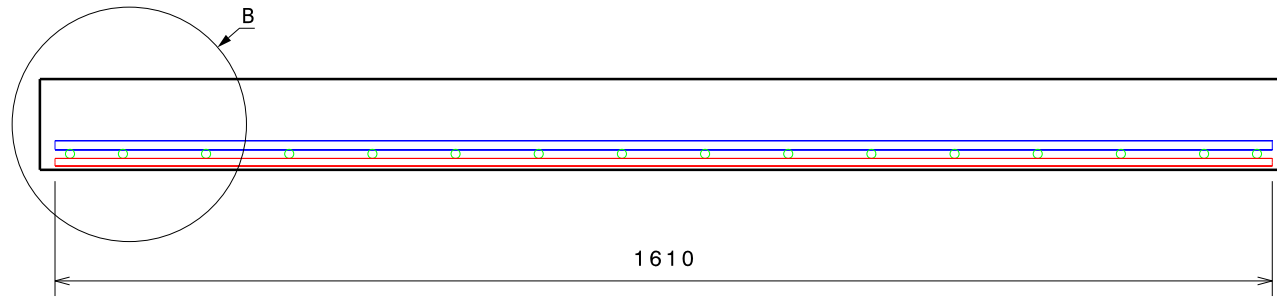
Front view
Scale: 1:10
Units: mm



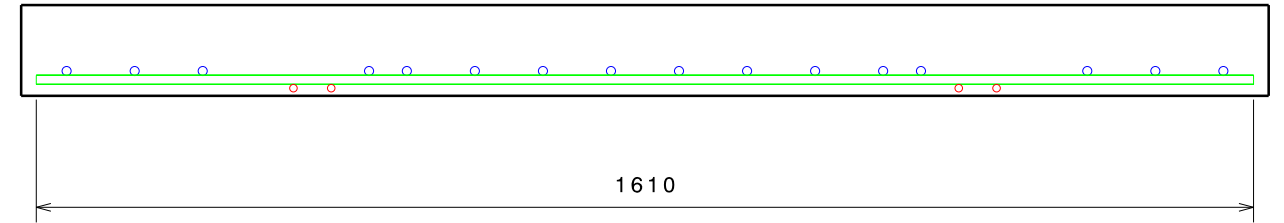
Top view
Scale: 1:10
Units: mm

Plano	Nombre Plano	Autores
	Posición relativa de los apoyos	
A1.2	Documento	Magí Domingo Tarancón Pablo Gonzalo Fernández
	Planos de la geometría y el armado de la losa	

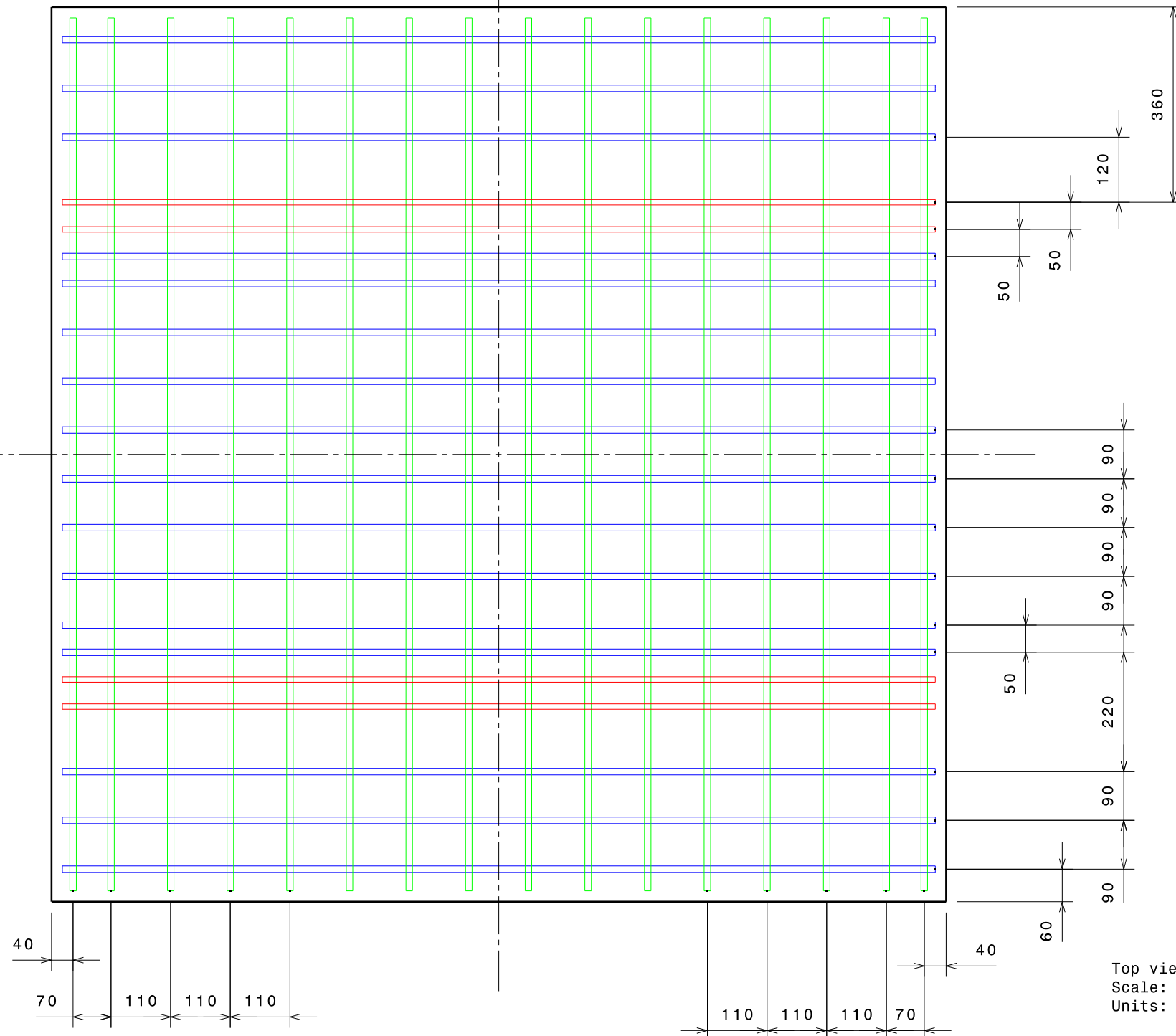




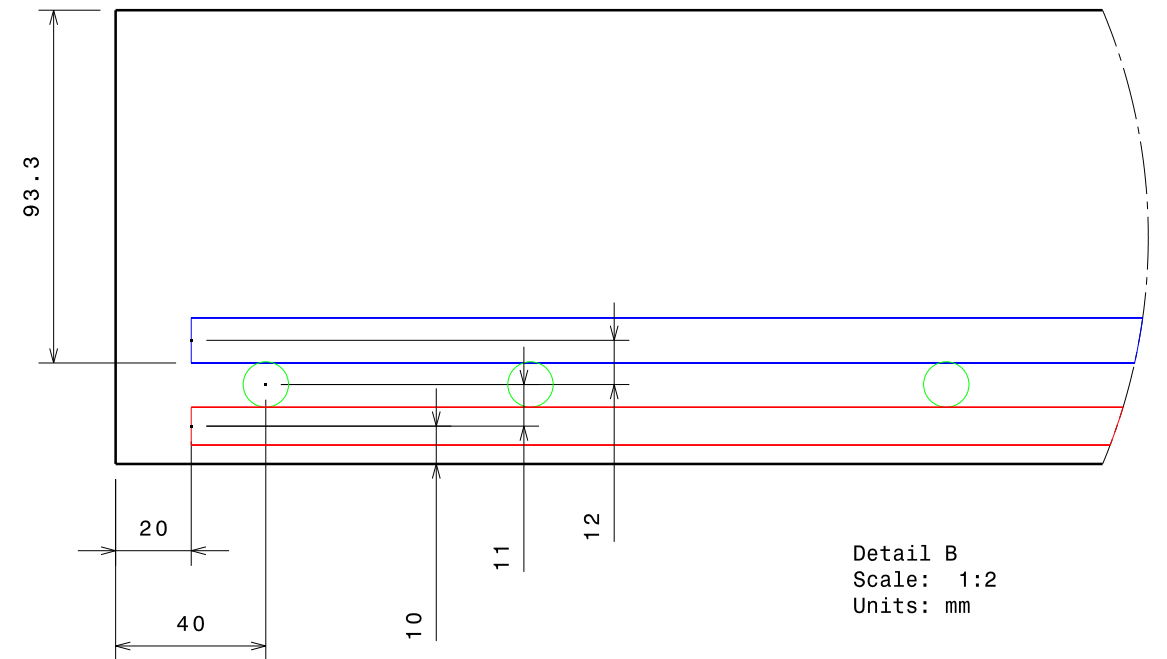
Front view
Scale: 1:10
Units: mm



Left view
Scale: 1:10
Units: mm

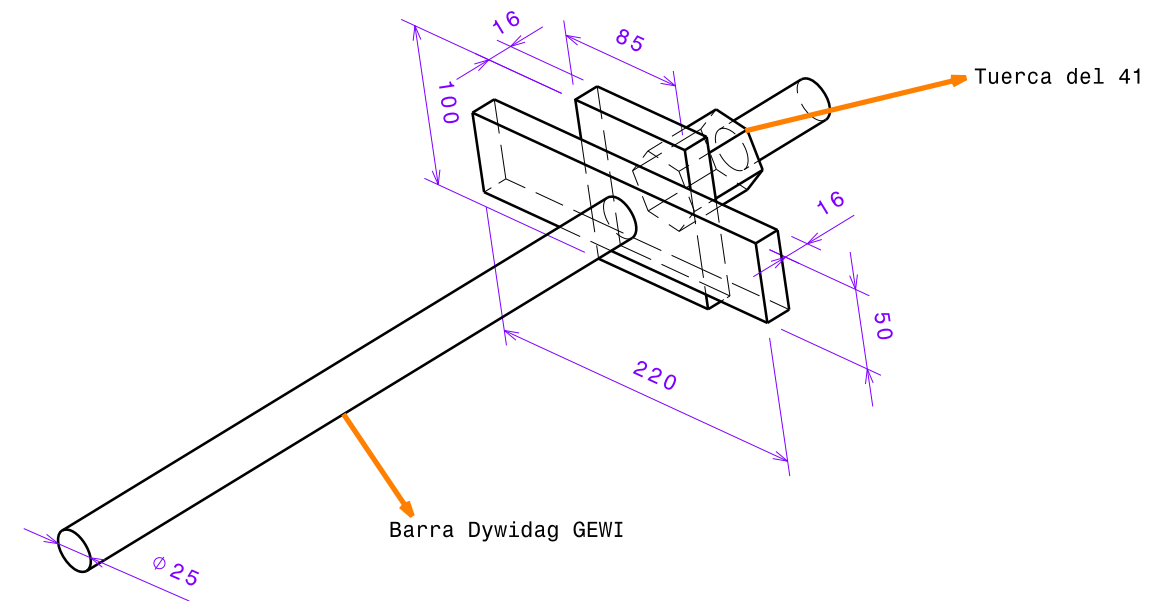
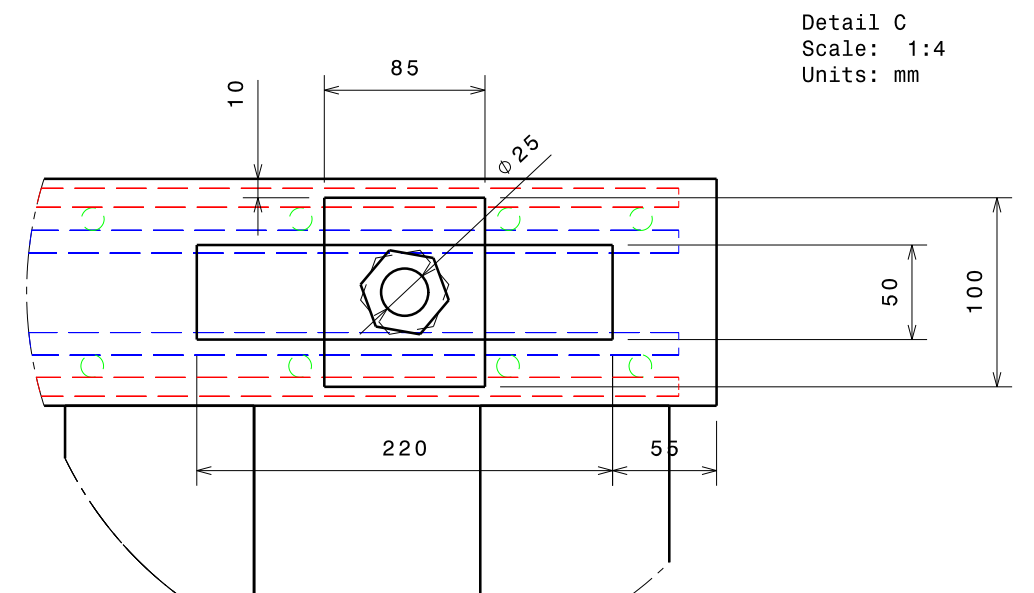


Top view
Scale: 1:10
Units: mm



Detail B
Scale: 1:2
Units: mm

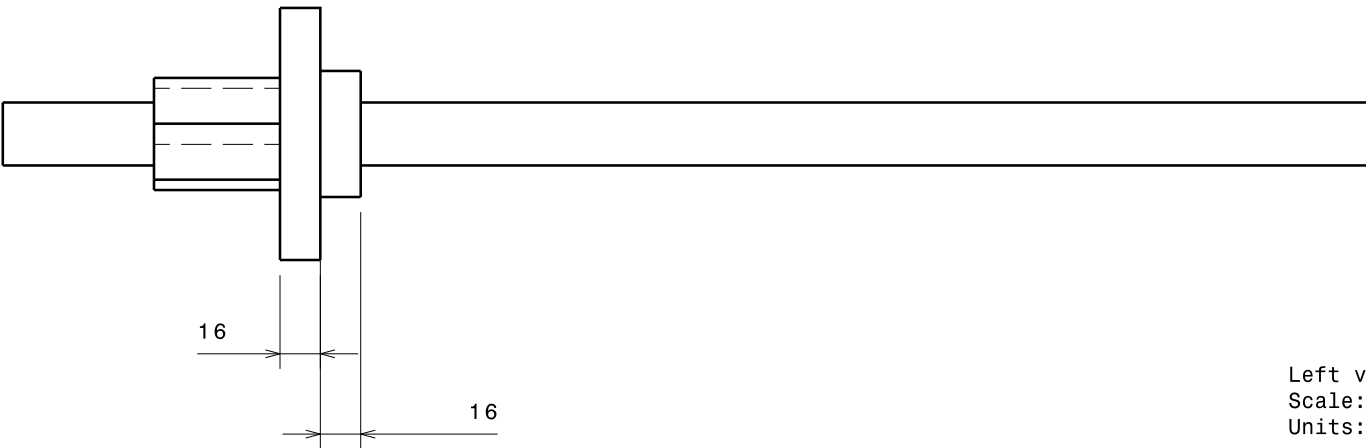
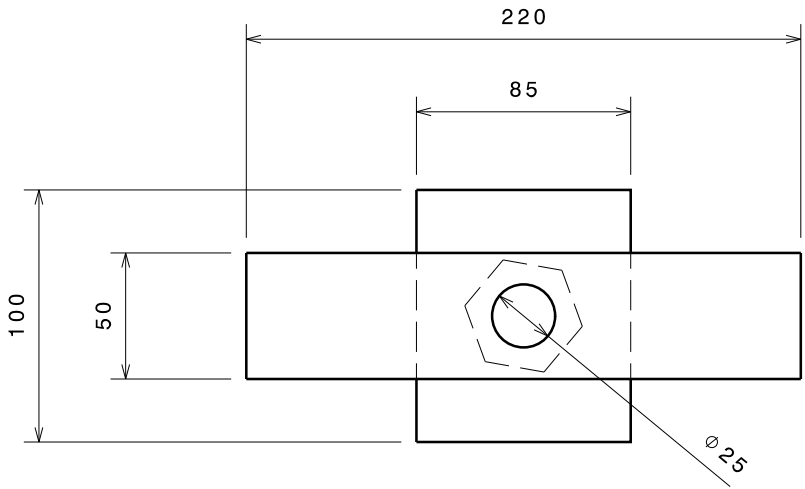
Plano A1.4	Nombre Plano Disposición armadura - Paramento traccionado	Autores Magí Domingo Tarancón Pablo Gonzalo Fernández
	Documento Planos de la geometría y el armado de la losa	



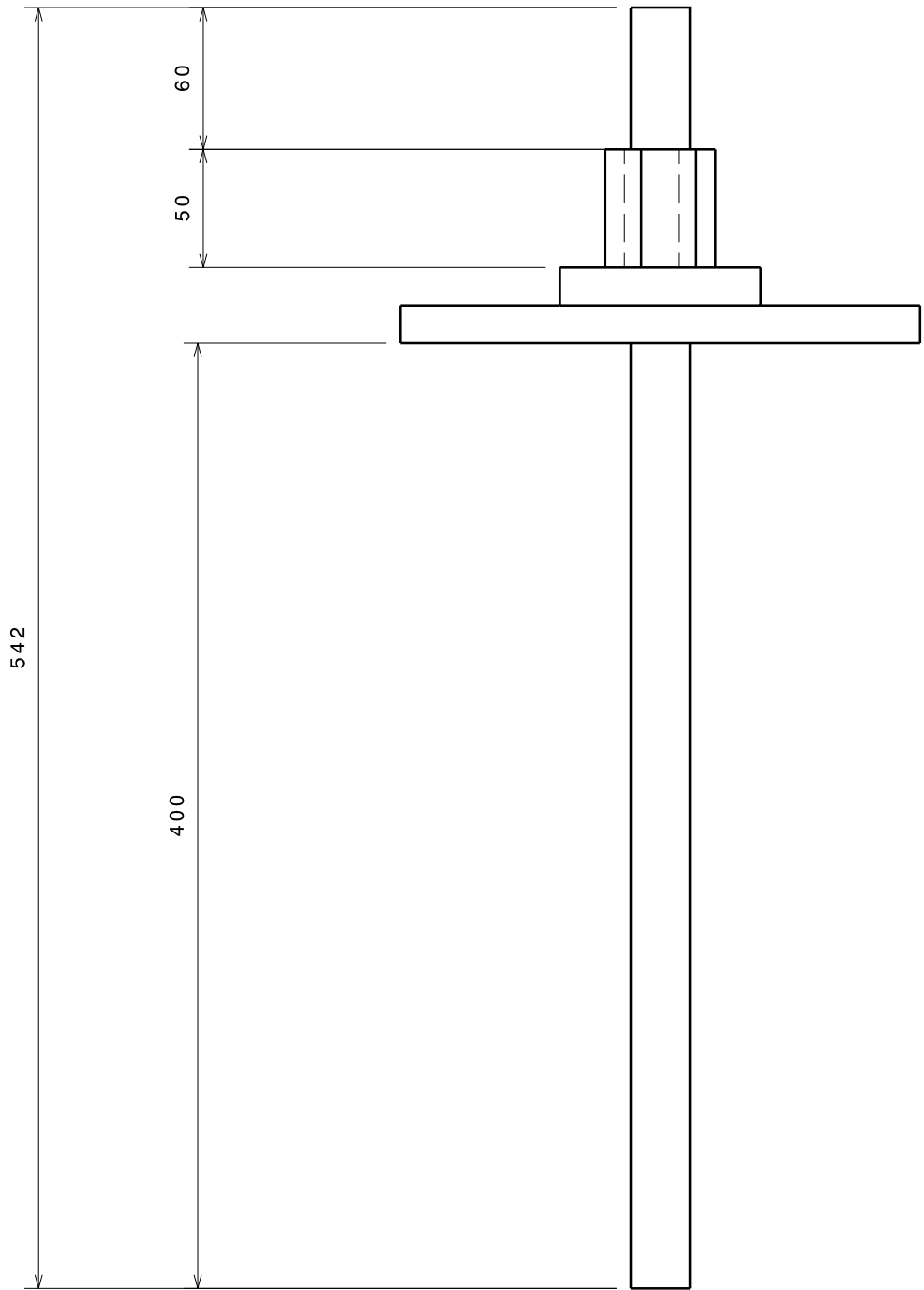
Isometric view
Scale: 1:4
Units: mm

<div>Plano</div> <div>A1.5</div>	<div>Nombre Plano</div> <div>Elementos de Tracción - Disposición y detalle</div>	<div>Autores</div> <div>Magí Domingo Tarancón</div> <div>Pablo Gonzalo Fernández</div>
	<div>Documento</div> <div>Planos de la geometría y el armado de la losa</div>	

Front view
Scale: 1:3
Units: mm



Left view
Scale: 1:3
Units: mm



Top view
Scale: 1:3
Units: mm

Plano

A1.6

Nombre Plano

Detalle del aprato para la transmisión de tracciones

Documento

Planos de la geometría y el armado de la losa

Autores

Magí Domingo
Tarancón
Pablo Gonzalo
Fernández

Apéndice B

Cálculos

En este apéndice se adjuntan los cálculos y suposiciones realizados durante el trabajo pero que no son vitales para el desarrollo del hilo argumental del mismo, y que a su vez, pueden obtenerse de manera fácil por el lector mediante las referencias aportadas en el cuerpo del trabajo. Esto permite descongestionar el texto de formulación extensa que puede comprobarse posteriormente a la lectura del texto y que solo entorpece a esta.

Para los cálculos referentes a la losa, se asume el prediseño realizado por *Pablo Gonzalo Fernández*, y se centraran en una segunda verificación, útil para el lector. Los cálculos se basarán principalmente en la Instrucción Española de Hormigón Estructural (EHE-08) [39] y, cuando se indique, el Eurocódigo 2 (EN1992-1-1) o la formulación de referencia (*Marí et al.* [11]).

B.1. Cálculo de tracciones admisibles

Dado que la losa esta pensada para ser sometida a tracciones en el plano, es importante saber a qué tracciones se puede someter a la misma sin problemas de fisuración.

Considerando que el hormigón trabajará íntegramente, las dimensiones de una sección transversal de este son 1650mmx120mm. En la dirección traccionada, tal y como se indica en la Sección 3.2.1, se utilizan: 32Ø12. Teniendo en cuenta la resistencia a tracción tanto del acero como del hormigón:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,3 \cdot 35^{2/3} = 3,21 \text{ MPa} \quad (\text{B.1})$$

$$E_h = 8500 \cdot \sqrt[3]{f_{cm}} = 8500 \cdot \sqrt[3]{35 + 8} = 29778,88 \text{ MPa} \quad (\text{B.2})$$

$$E_s = 200,000 \text{ MPa} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} T_{lim} &= (b \cdot h + n \cdot A_s) \cdot F_{ctm} = \\ &= (1650 \cdot 120 + 6,72 \cdot 32 \cdot 6^2 \pi) \cdot 3,21 = 713648 \text{ N} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B.2. Verificación a Punzonamiento

En este apartado se exponen los cálculos que respaldan los resultados presentados en la Sección 3.3.2

B.2.1. Cálculos previos

Tanto la norma europea como la formulación de referencia utilizan parámetros comunes que pueden ser calculados como paso previo.

La cuantía de armadura geométrica (ρ) se define en ambos casos para un ancho “eficaz” equivalente a $b = c + 2 \cdot (3d)$, siendo c el ancho de columna y únicamente sobre la armadura traccionada.

Para el caso de la losa propuesta, una dirección contiene 8 redondos mientras la otra contiene 6. Así pues:

$$b_{eff} = c + 6 \cdot d = 150 + 6 \cdot 93 = 708 \text{ mm} \quad (\text{B.5})$$

$$\rho_x = \frac{A_{s,x}}{d \cdot b_{eff}} = \frac{6 \cdot 6^2 \pi}{93 \cdot 708} = 0,01036 \quad (\text{B.6})$$

$$\rho_y = \frac{A_{s,y}}{d \cdot b_{eff}} = \frac{8 \cdot 6^2 \pi}{93 \cdot 708} = 0,013741 \quad (\text{B.7})$$

B.2.2. EN1992-1-1

Según la norma *EN1992-1-1 Eurocódigo 2: Diseño de estructuras de hormigón - Parte 1-1: Normas generales y normas de edificación*, y siguiendo lo expuesto en la Sección 2.2.1, el punzonamiento se verifica según la expresión

$$v_{Ed} \leq v_{Rd,c} \quad (\text{B.8})$$

Donde v_{Ed} se obtiene a partir de la carga puntual aplicada dividida por el perímetro de control y la profundidad de la losa. Dado que en este trabajo se intenta comparar el resultado del código con las simulaciones, se prescindirá de cualquier coeficiente que minore la resistencia o mayor las cargas, dado que no se pretende minorar el resultado de las simulaciones.

La resistencia a punzonamineto de losas sin armadura de cortante se expone como:

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa} \quad \& \quad d = 93 \text{ mm} \quad (\text{B.9})$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 2,466 \quad \rightarrow \quad k = 2 \quad (\text{B.10})$$

$$\rho_l = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = \sqrt{0,010306 \cdot 0,013741} = 0,0119 \leq 0,02 \quad (\text{B.11})$$

$$\sigma_{cp} = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$C_{Rd,c} = 0,18/\gamma_c \quad \rightarrow \quad C_{Rd,c} = 0,18 \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} v_{Rd,c} &= C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + k_1 \sigma_{cp} = \\ &= 0,18 \cdot 2 \cdot (100 \cdot 0,0119 \cdot 35)^{1/3} = 1,2478 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$v_{min} = 0,035 \cdot k^{3/2} \cdot f_{ck}^{1/2} = 0,5856 \leq v_{Rd,c} \quad (\text{Ok}) \quad (\text{B.15})$$

$$u = 4 \cdot c + 2 \cdot (2 \cdot d) \pi = 4 \cdot 150 + 4 \cdot 93 \cdot \pi = 1768,67 \text{ mm} \quad (\text{B.16})$$

$$V_d = v_{Rd,c} \cdot u \cdot d = 1,2478 \cdot 1768,67 \cdot 93 \cdot 0,001 = \underline{205,26 \text{ kN}} \quad (\text{B.17})$$

B.2.3. Modelo de *Marí et al. (2018)*

Tal y como se ha expuesto en profundidad en la Sección 2.1.3, el modelo mecánico propuesto por *Marí et al.* se puede reducir, tras iterar, en una expresión lineal simplificada:

$$V_{cu} = V_c + V_w = \xi \left(1,125 \frac{x}{d} + 0,425 \right) \cdot f_{ctm} u_{crit} d \quad (\text{B.18})$$

Evaluando numéricamente cada uno de los parámetros usados en la expresión anterior con los datos de la losa introducida:

$$n = \frac{E_s}{E_h} = \frac{200000}{29778,88} = 6,72 \quad (\text{B.19})$$

$$\xi = \frac{2(d/a)^{0,2}}{\sqrt{1 + d_0/200}} = \frac{2(93/750)^{0,2}}{\sqrt{1 - 93/200}} = 1,088418 \quad (\text{B.20})$$

$$\rho_l = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = \sqrt{0,010306 \cdot 0,013741} = 0,0119 \quad (\text{B.21})$$

$$u_{crit} = 4 \cdot c + 2 \cdot (0,5d)\pi = 4 \cdot 150 + 93 \cdot \pi = 892,16 \text{ mm} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{d} &= n \cdot \rho_l \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n \cdot \rho_l}} \right) = \\ &= 6,72 \cdot 0,0119 \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{6,72 \cdot 0,0119}} \right) = 0,3275 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} V_{cu} &= \xi \left(1,125 \frac{x}{d} + 0,425 \right) f_{ctm} u_{crit} d = \\ &= 1,088418 \cdot (1,125 \cdot 0,3275 + 0,425) \cdot 3,21 \cdot 892,16 \cdot 93 \cdot 0,001 = \\ &= \underline{229,998 \text{ kN}} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$k_c = \min \left\{ \frac{x}{d}; 0,2 \right\} = 0,2 \quad (\text{B.25})$$

$$d_0 = \max \{d; 100 \text{ mm}\} = 100 \text{ mm} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} V_{cu,min} &= \left[\xi(1,125k_c + 0,375) + \frac{10}{d_0} \right] f_{ctm} u_{crit} d = \\ &= \left[1,088418 \cdot (1,125 \cdot 0,2 + 0,375) + \frac{10}{100} \right] \cdot \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\cdot 3,21 \cdot 892,16 \cdot 93 \cdot 0,001 = 200,564 \text{ kN} \leq V_{cu} \quad (\text{Ok})$$

B.3. Verificación de la armadura a flexión

En esta sección se presenta una verificación preliminar sobre la cantidad de armado que presenta la losa frente a la flexión y la flexión combinada con tracciones en el plano.

Esta verificación se basa en comprobar el comportamiento del acero bajo tracciones y el hormigón bajo compresiones en las dos direcciones ortogonales de armado, consideradas independientes para este cálculo.

Para todos los cálculos de esta sección se prescinde de cualquier coeficiente de seguridad, con la intención de obtener predicciones lo más ajustadas a la realidad.

B.3.1. Momento de diseño

Previo a cualquier verificación de armadura, es necesario conocer el momento de diseño que se presenta en la losa, fruto de la carga puntual aplicada en el centro de esta.

Por ello, se consideran los momentos (por metro lineal) que aparecen en una sección transversal que cruza el centro de la losa, generando tensiones perpendiculares a esta, bajo una carga puntual de $P=1\text{kN}$. Estos pueden obtenerse mediante cualquier programa de cálculo numéricos de estructuras basado en elementos viga y losa (SAP2000, ABAQUS, etc.).

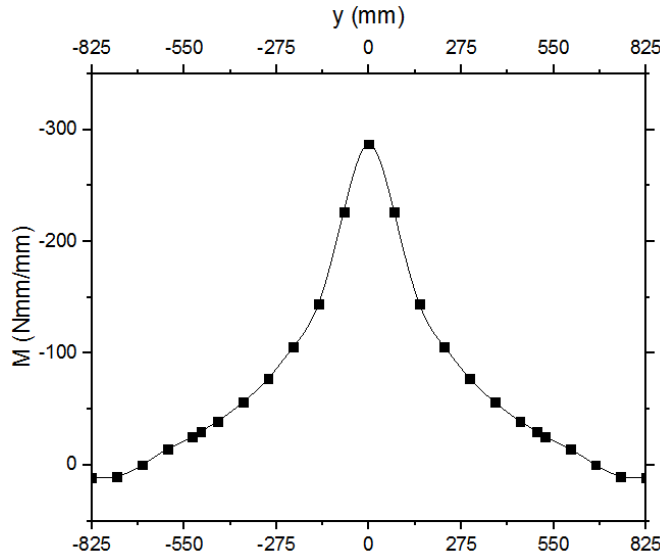


Figura B.1: Distribución de momentos sobre la sección transversal del centro de la losa, bajo una carga de $P=1\text{kN}$.

Una vez calculados, para una carga de 1kN , la Figura B.1 muestra su distribución a lo largo de la sección transversal. Integrando el metro más solicitado (situado en el centro), se obtiene un momento asociado a la carga $P=1\text{kN}$ de:

$$M_d = 0,1235 \cdot P \quad (\text{B.28})$$

Considerando un ancho de losa de 1.5m y una carga de punzonamiento de 230.126kN :

$$M_d = 42,631 \text{ kNm} \quad (\text{B.29})$$

B.3.2. Verificación sobre la dirección no traccionada

Para la verificación de la armadura dispuesta en la dirección no traccionada de la losa se considera la expresión para flexión simple en secciones rectangulares expuesta en el Anejo 7 de la norma *EHE-08* [39].

Cabe destacar que para la comprobación no se han considerado los dos redondos de los extremos de la losa, asumiendo así la contribución de 14Ø12 solamente.

$$f_{cm} = 43 \text{ MPa} \quad b = 1500 \text{ mm} \quad d = 93 \text{ mm} \quad f_y = 500 \text{ MPa} \quad n = 6,72 \quad (\text{B.30})$$

$$U_0 = f_{cd}bd = 43 \cdot 1500 \cdot 93 = 5998500 \text{ N} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{d} &= n \cdot \rho \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n \cdot \rho}} \right) = \\ &= 6,72 \cdot 0,01135 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{6,72 \cdot 0,01135}} \right) = 0,3216 \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$x = 29,908 \text{ mm} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} M_f &= 0,8U_0 \cdot x \left(1 - 0,4\frac{x}{d} \right) = \\ &= 0,8 \cdot 5998500 \cdot 29,908 (1 - 0,4 \cdot 0,3216) \cdot 10^{-6} = \\ &= 125,08 \text{ kNm} \geq M_d \quad \text{Ok} \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

B.3.3. Verificación sobre la dirección traccionada

La verificación de la armadura dispuesta en la dirección traccionada, a diferencia del caso anterior, se realiza a partir del equilibrio de la sección, considerando que esta está sometida a la acción combinada del momento (debido a la carga concentrada) y a las tracciones en el plano.

Realizando el equilibrio entre los esfuerzos externos (momento y tracciones) y los elementos resistentes, armaduras (de los paramentos superior e inferior) y el hormigón a compresión, se pueden formular las siguientes expresiones:

$$T = -C - A_{s2}\sigma_{s2} + A_{s1}\sigma_{s1} \quad (\text{B.35})$$

$$M_d - T \left(\frac{h}{2} - d' \right) = C (d - 0,5y) + A_{s2}\sigma_{s2}(d - d') \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_{s2}}{x - d'} = \frac{\varepsilon_{s1}}{d - x} \quad (\text{B.37})$$

$$C = 0,8x \cdot b \cdot \sigma_c \quad (\text{B.38})$$

Donde se ha considerado una distribución de tensiones rectangular para el hormigón comprimido, de profundidad $y = 0,8x$.

Considerando que la armadura de ambos paramentos es igual, $A_{s1} = A_{s2} = A_s$, y de valor $A_s = 1583,88 \text{ mm}^2$.

Reformulando las igualdades de la expresión (B.37), se obtiene:

$$\sigma_{s2} = \frac{\sigma_c \cdot n(x - d')}{x} \quad (\text{B.39})$$

$$\sigma_{s1} = \frac{\sigma_c \cdot n(d - x)}{x} \quad (\text{B.40})$$

Cuyas expresiones permiten expresar las Ecs.(B.35) y (B.36) como:

$$T = \sigma_c \left[-0,8x \cdot b + \frac{A_s n}{x} (d' + d - 2x) \right] \quad (\text{B.41})$$

$$M_d - T \left(\frac{h}{2} - d' \right) = 0,8xb\sigma_c (d - 0,4x) + \frac{A_s \sigma_c n}{x} (d - d') (x - d') \quad (\text{B.42})$$

A partir de las Ecs.(B.41) y (B.42) puede observarse que:

- Para un nivel de tracciones superior a $T = 0,8T_{lim}$, las armaduras del paramento traccionado empiezan a plastificar. Este estado resulta en una tensión de compresión de $\sigma_c = 17,55 \text{ MPa}$ (Aceptable) y en una profundidad del eje neutro de $x = 17,92 \text{ mm}$.
- Considerando que la armadura traccionada plastifica, $\sigma_{s1} = f_y$, se puede llegar a un nivel de tracciones de $T = T_{lim}$, con el hormigón bajo unas compresiones de $\sigma_c = 42,9 \text{ MPa}$ y una profundidad del eje neutro de $x = 12,2 \text{ mm}$.

De los resultados puede interpretarse que, como primera aproximación, la losa rompe a punzonamiento y no a flexión hasta un nivel de tracciones de $0,8T_{lim}$ y posteriormente se genera una posible rotura a flexo-tracción.

B.4. Verificación a Punzonamiento con Tracciones

En esta sección se presentan las suposiciones y cálculos necesarios para obtener los resultados expuestos en la Sección 4.3.2.

Para los cálculos expuestos se asumen los datos previos presentados en la Sección B.2.1.

B.4.1. EN1991-1-1

Considerando la resistencia a punzonamiento, sin negligir las tracciones:

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa} \quad \& \quad d = 93 \text{ mm} \quad (\text{B.43})$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 2,466 \quad \rightarrow \quad k = 2 \quad (\text{B.44})$$

$$\rho_l = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = \sqrt{0,010306 \cdot 0,013741} = 0,0119 \leq 0,02 \quad (\text{B.45})$$

$$\sigma_{ct,lim} = \frac{T_{lim}}{h \cdot b} = \frac{713648}{120 \cdot 1650} = 3,6043 \text{ MPa} \quad (\text{B.46})$$

$$\alpha_T = \frac{T}{T_{lim}} = [0 : 0,1 : 1,5] \quad (\text{B.47})$$

$$\sigma_{cp} = \alpha_T \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \alpha_T \frac{\sigma_{ct,lim}}{2} = \alpha_T \frac{-3,6043}{2} \quad (\text{B.48})$$

$$k_1 = 0,1 \quad (\text{B.49})$$

$$C_{Rd,c} = 0,18/\gamma_c \quad \rightarrow \quad C_{Rd,c} = 0,18 \quad (\text{B.50})$$

$$\begin{aligned} v_{Rd,c} &= C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + k_1 \sigma_{cp} = \\ &= 0,18 \cdot 2 \cdot (100 \cdot 0,0119 \cdot 35)^{1/3} - 0,1 \cdot \alpha_T \cdot 1,80215 = \\ &= 1,2478 - 0,180215 \cdot \alpha_T \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

$$\begin{aligned} v_{min} &= 0,035 \cdot k^{3/2} \cdot f_{ck}^{1/2} + k_1 \sigma_{cp} = \\ &= 0,5856 - 0,180215 \cdot \alpha_T \leq v_{Rd,c} \quad (\text{Ok}) \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

$$u = 4 \cdot c + 2 \cdot (2 \cdot d) \pi = 4 \cdot 150 + 4 \cdot 93 \cdot \pi = 1768,67 \text{ mm} \quad (\text{B.53})$$

$$\begin{aligned} V_d &= v_{Rd,c} \cdot u \cdot d = (1,2478 - 0,180215 \cdot \alpha_T) \cdot \\ &\cdot 1768,67 \cdot 93 \cdot 0,001 = \underline{205,26 - 29,643 \alpha_T \text{ kN}} \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

B.4.2. Modelo de *Marí et al. (2018)* modificado

Considerando las modificaciones realizadas sobre el modelo de referencia, de *Marí et al. (2018)* basado en el CCCM y transmitidas personalmente al autor de esta tesis, presentadas en la Sección 4.1.1 se exponen las bases de cálculo con las que se puede dar soporte a los resultados aportados en la Sección 4.3.2.

$$n = \frac{E_s}{E_h} = \frac{200000}{29778,88} = 6,72 \quad (\text{B.55})$$

$$\xi = \frac{2(d/a)^{0,2}}{\sqrt{1 + d_0/200}} = \frac{2(93/750)^{0,2}}{\sqrt{1 - 93/200}} = 1,088418 \quad (\text{B.56})$$

$$\rho_l = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} = \sqrt{0,010306 \cdot 0,013741} = 0,0119 \quad (\text{B.57})$$

$$u_{crit} = 4 \cdot c + 2 \cdot (0,5d)\pi = 4 \cdot 150 + 93 \cdot \pi = 892,16 \text{ mm} \quad (\text{B.58})$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{d} &= n \cdot \rho_l \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n \cdot \rho_l}} \right) = \\ &= 6,72 \cdot 0,0119 \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{6,72 \cdot 0,0119}} \right) = 0,3275 \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

$$\begin{aligned} V_{ct} &= \xi \left([1,125 - 0,85\alpha_T] \frac{x}{d} + 0,425 \right) f_{ctm} u_{crit} d = \\ &= 1,088418 \cdot ([1,125 - 0,85\alpha_T] \cdot 0,3275 + 0,425) \cdot \\ &\cdot 3,21 \cdot 892,16 \cdot 93 \cdot 0,001 = \underline{229,998 - 80,6968\alpha_T \text{ kN}} \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

$$\begin{aligned} V_{c0} &= \xi \left(1,125 \frac{x}{d} + 0,425 \right) f_{ctm} u_{crit} d = \\ &= 1,088418 \cdot (1,125 \cdot 0,3275 + 0,425) \cdot 3,21 \cdot 892,16 \cdot 93 \cdot 0,001 = \\ &= \underline{229,998 \text{ kN}} \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

$$V_{cu} = \frac{V_{ct} + V_{c0}}{2} = \underline{229,998 - 40,35\alpha_T \text{ kN}} \quad (\text{B.62})$$

Apéndice C

Parámetros materiales introducidos en ABAQUS

Hormigón	
Parámetro	Valor
$E_{0,4}$	38153.82 MPa - Ec.(3.6)
ν	0.2
<i>Concrete Damaged Plasticity (CDP)</i>	
ψ	40°
ϵ	0.1
f_{b0}/f_{c0}	1.16
K_c	0.667
η	$1 \cdot 10^{-6}$
<i>CDP - Compression Stiffening</i>	
f_{cm}	43 MPa
ϵ_{c0}	0.002
ϵ_{cu}	0.0035
$\sigma_c - \tilde{\epsilon}_c^{in}$	Ec.(3.7) (Tabular)
<i>CDP - Tension Stiffening</i>	
$\sigma_c - \tilde{\epsilon}_{ct}^{ck}$	Ec.(3.15) (Tabular)
Acero	
Parámetro	Valor
E_a	200000 MPa
ν	0.3
<i>Plasticity</i>	
f_y	500 MPa
$\sigma_a - \epsilon_a^{pl}$	500-0

Cuadro C.1: Resumen de parámetros materiales a introducir en el paquete de cálculo ABAQUS

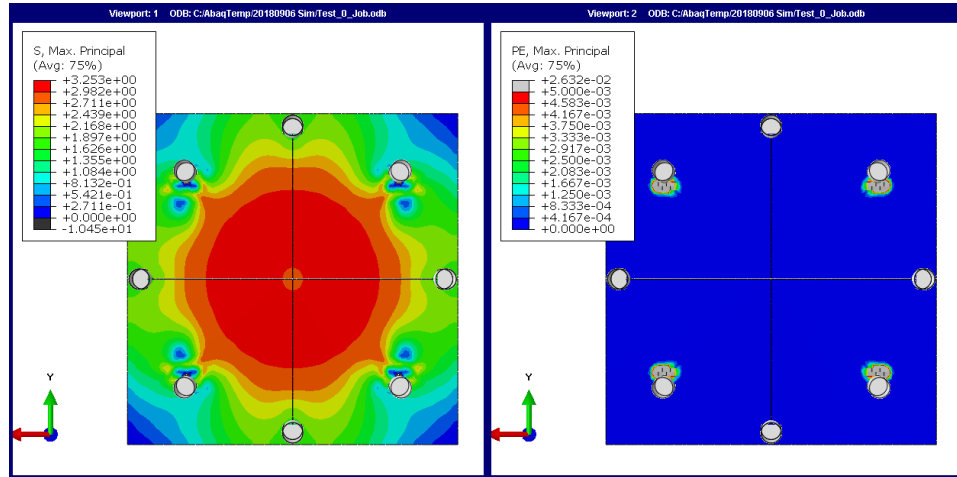
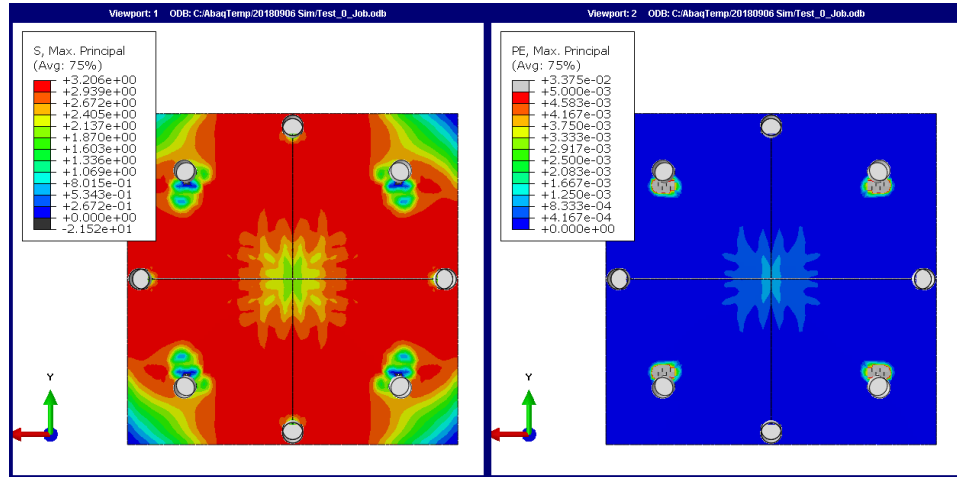
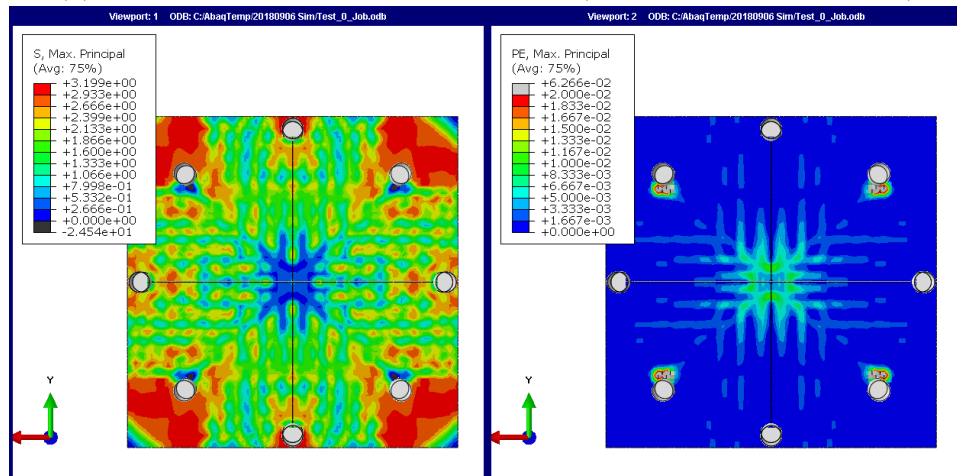
Apéndice D

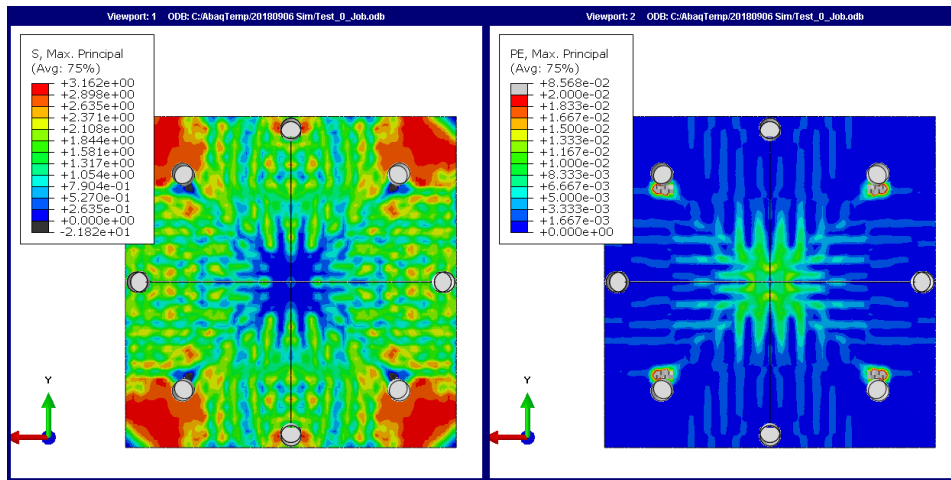
Resultados gráficos

Con el objetivo de descongestionar el cuerpo del trabajo, se presentan en este apéndice una colección de imágenes de los resultados numéricos sobre el punzonamiento y la acción combinada del punzonamiento con tracciones aplicadas en el plano.

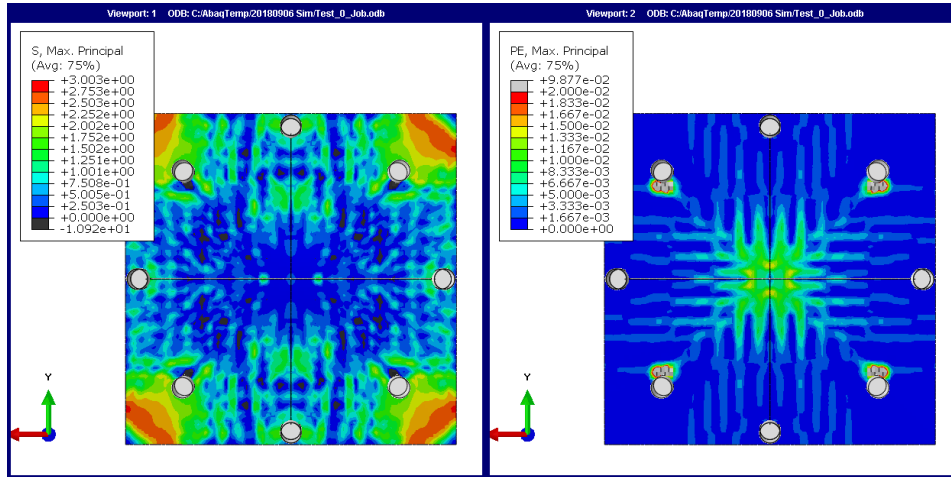
D.1. Simulación del punzonamiento sin tracciones

En las siguientes imágenes se presenta el binomio tensiones principales máximas (tacciones) - Deformaciones plásticas principales máximas en puntos relevantes de la curva Carga-Desplazamiento.

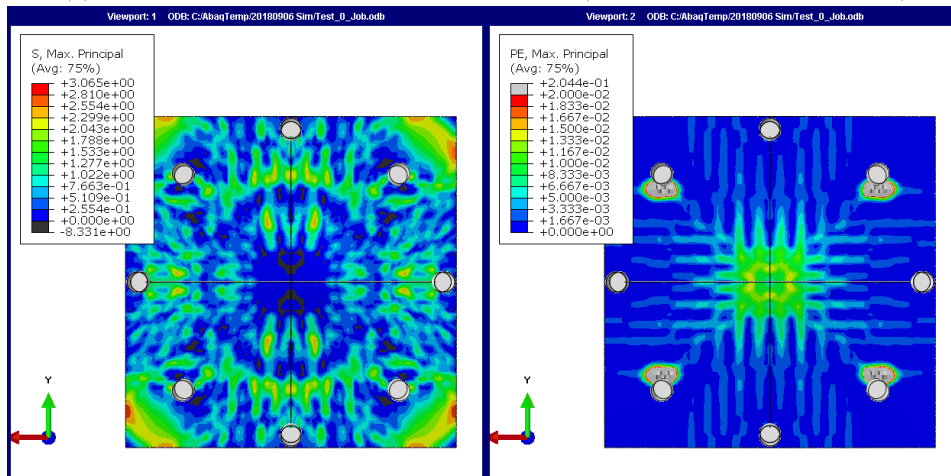
(a) Tensión-Deformación correspondientes a ($P = 84,4 \text{ kN}$, $\delta = 0,44 \text{ mm}$)(b) Tensión-Deformación correspondientes a ($P = 136,5 \text{ kN}$, $\delta = 1,08 \text{ mm}$)(c) Tensión-Deformación correspondientes a ($P = 225 \text{ kN}$, $\delta = 4,74 \text{ mm}$)



(d) Tensión-Deformación correspondientes a ($P = 265,17 \text{ kN}$, $\delta = 7,95 \text{ mm}$)



(e) Tensión-Deformación correspondientes a ($P = 185,25 \text{ kN}$, $\delta = 10 \text{ mm}$)



(f) Tensión-Deformación correspondientes a ($P = 139,5 \text{ kN}$, $\delta = 20 \text{ mm}$)

D.2. Simulación del punzonamiento con tracciones

En las siguientes imágenes se presentan las tensiones principales máximas (tracciones) para los casos de losas bajo tracciones en el plano medio de $T = 0\%T_{lim}$, $T = 50\%T_{lim}$, $T = 100\%T_{lim}$ y $T = 150\%T_{lim}$, considerando que el orden de las imágenes es de izquierda a derecha y de arriba a bajo, respectivamente.

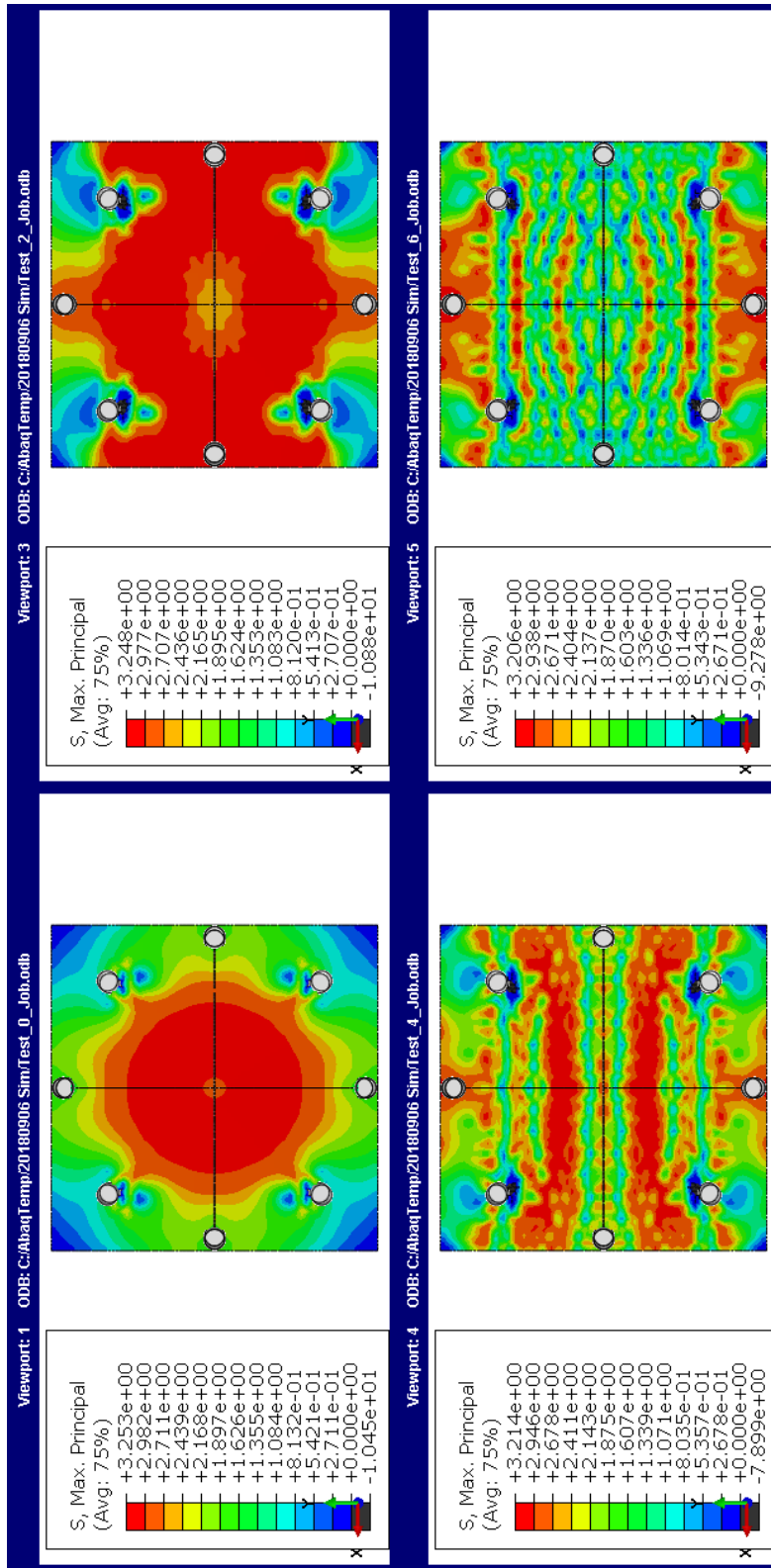


Figura D.2: Tensiones correspondientes a ($P = 84,4 \text{ kN}$, $\delta = 0,44 \text{ mm}$) ($0\%T_{lim}$), ($P = 79,9 \text{ kN}$, $\delta = 0,44 \text{ mm}$) ($50\%T_{lim}$), ($P = 37,35 \text{ kN}$, $\delta = 0,44 \text{ mm}$) ($100\%T_{lim}$) y ($P = 40 \text{ kN}$, $\delta = 0,44 \text{ mm}$) ($150\%T_{lim}$)

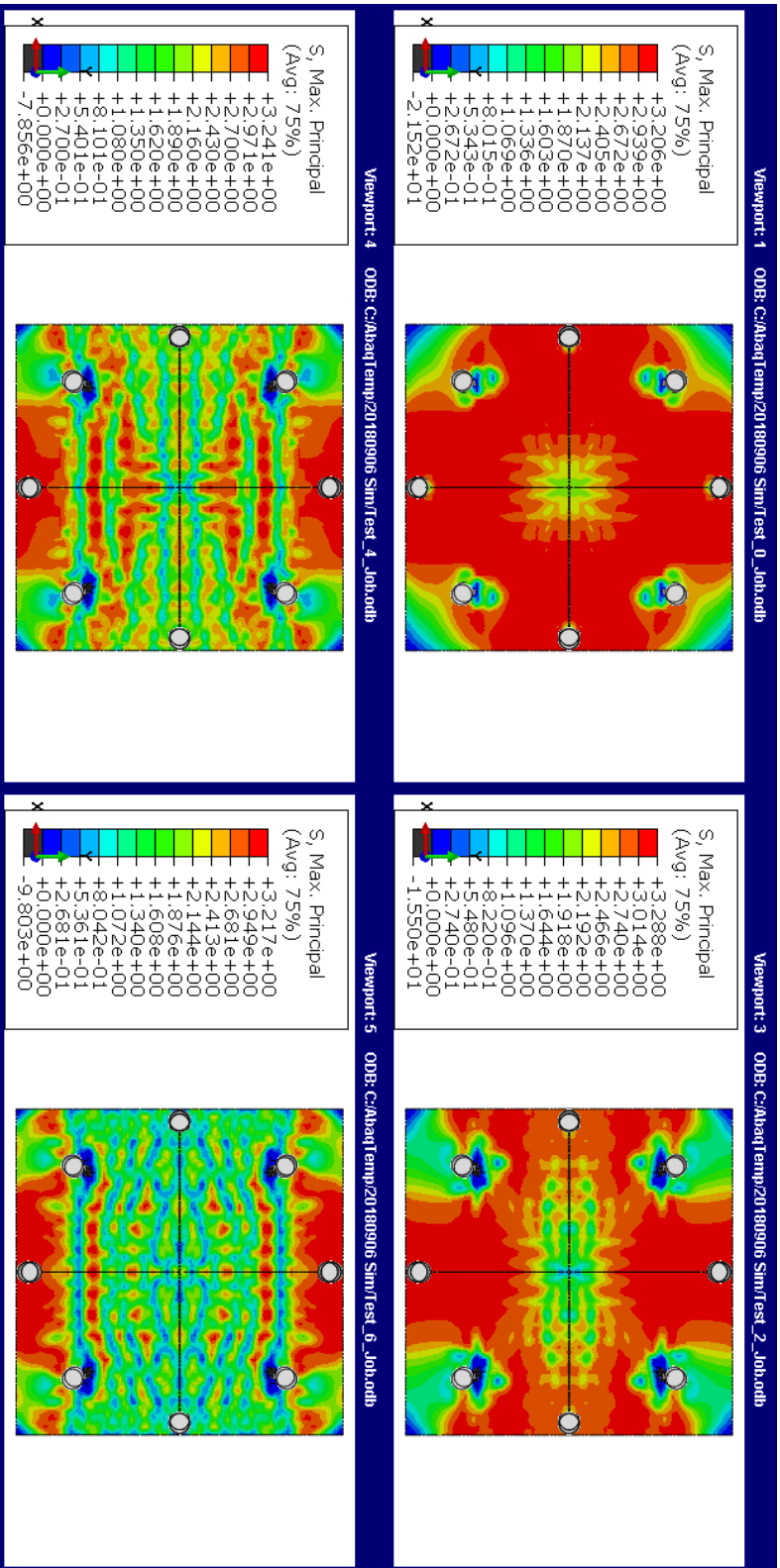


Figura D.3: Tensiones correspondientes a ($P = 136,5\text{ kN}$, $\delta = 1,08\text{ mm}$) ($0\%T_{lim}$), ($P = 105,62\text{ kN}$, $\delta = 1,08\text{ mm}$) ($50\%T_{lim}$), ($P = 69,95\text{ kN}$, $\delta = 1,08\text{ mm}$) ($100\%T_{lim}$) y ($P = 72,73\text{ kN}$, $\delta = 1,08\text{ mm}$) ($150\%T_{lim}$)

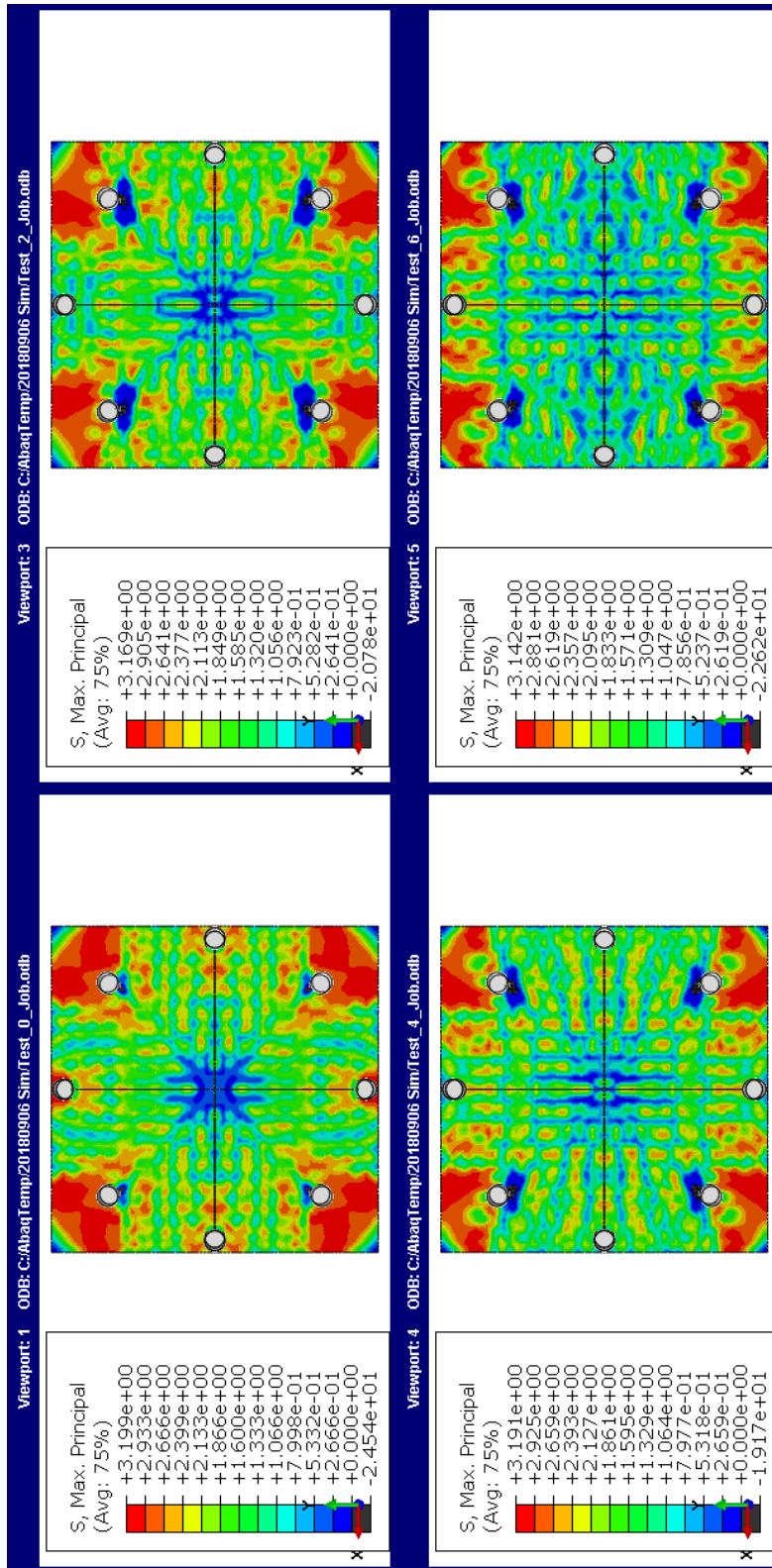


Figura D.4: Tensiones correspondientes a ($P = 225 \text{ kN}$, $\delta = 4,7 \text{ mm}$) ($0 \%T_{lim}$), ($P = 195 \text{ kN}$, $\delta = 4,7 \text{ mm}$) ($50 \%T_{lim}$), ($P = 175,6 \text{ kN}$, $\delta = 4,7 \text{ mm}$) ($100 \%T_{lim}$) y ($P = 157,9 \text{ kN}$, $\delta = 4,7 \text{ mm}$) ($150 \%T_{lim}$)

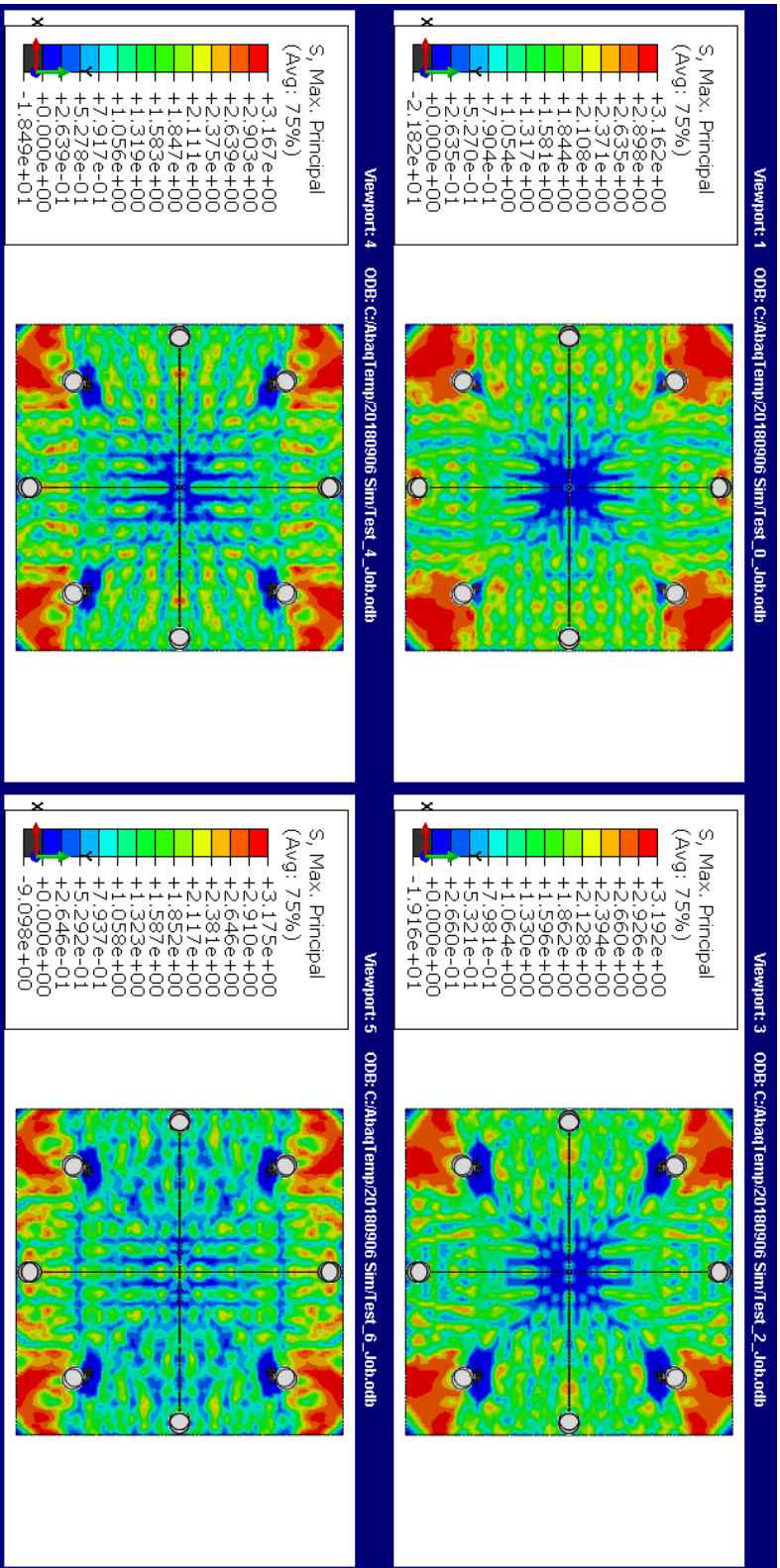


Figura D.5: Tensiones correspondientes a ($P = 265,17\text{ kN}$, $\delta = 7,95\text{ mm}$) ($0\%T_{lim}$), ($P = 238,2\text{ kN}$, $\delta = 7,95\text{ mm}$) ($50\%T_{lim}$), ($P = 219,68\text{ kN}$, $\delta = 7,95\text{ mm}$) ($100\%T_{lim}$) y ($P = 157,3\text{ kN}$, $\delta = 7,95\text{ mm}$) ($150\%T_{lim}$)

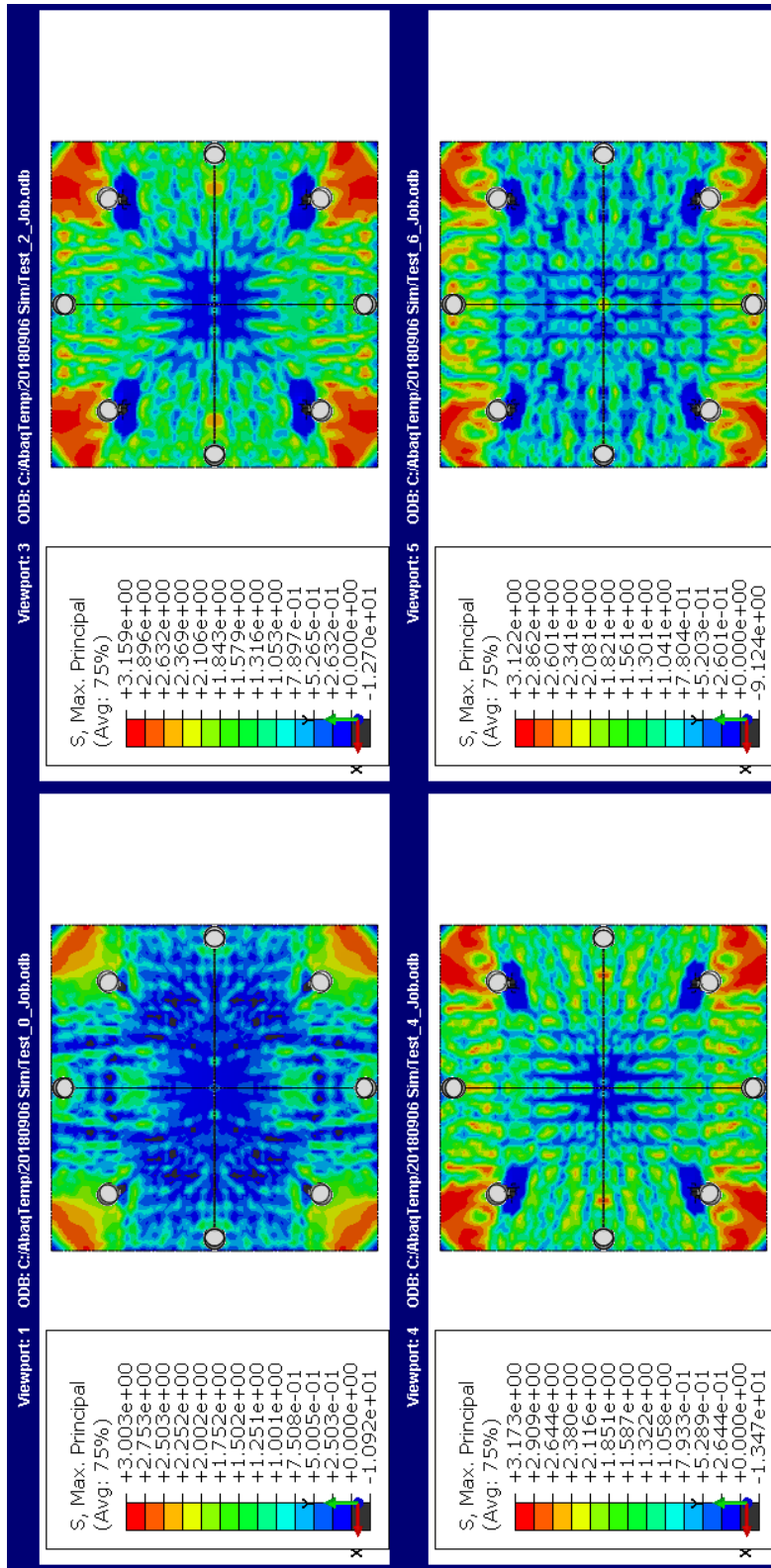


Figura D.6: Tensiones correspondientes a ($P = 185,25 \text{ kN}$, $\delta = 10 \text{ mm}$) ($0\%T_{lim}$), ($P = 223,6 \text{ kN}$, $\delta = 10 \text{ mm}$) ($50\%T_{lim}$), ($P = 224,35 \text{ kN}$, $\delta = 10 \text{ mm}$) ($100\%T_{lim}$) y ($P = 142,75 \text{ kN}$, $\delta = 10 \text{ mm}$) ($150\%T_{lim}$)

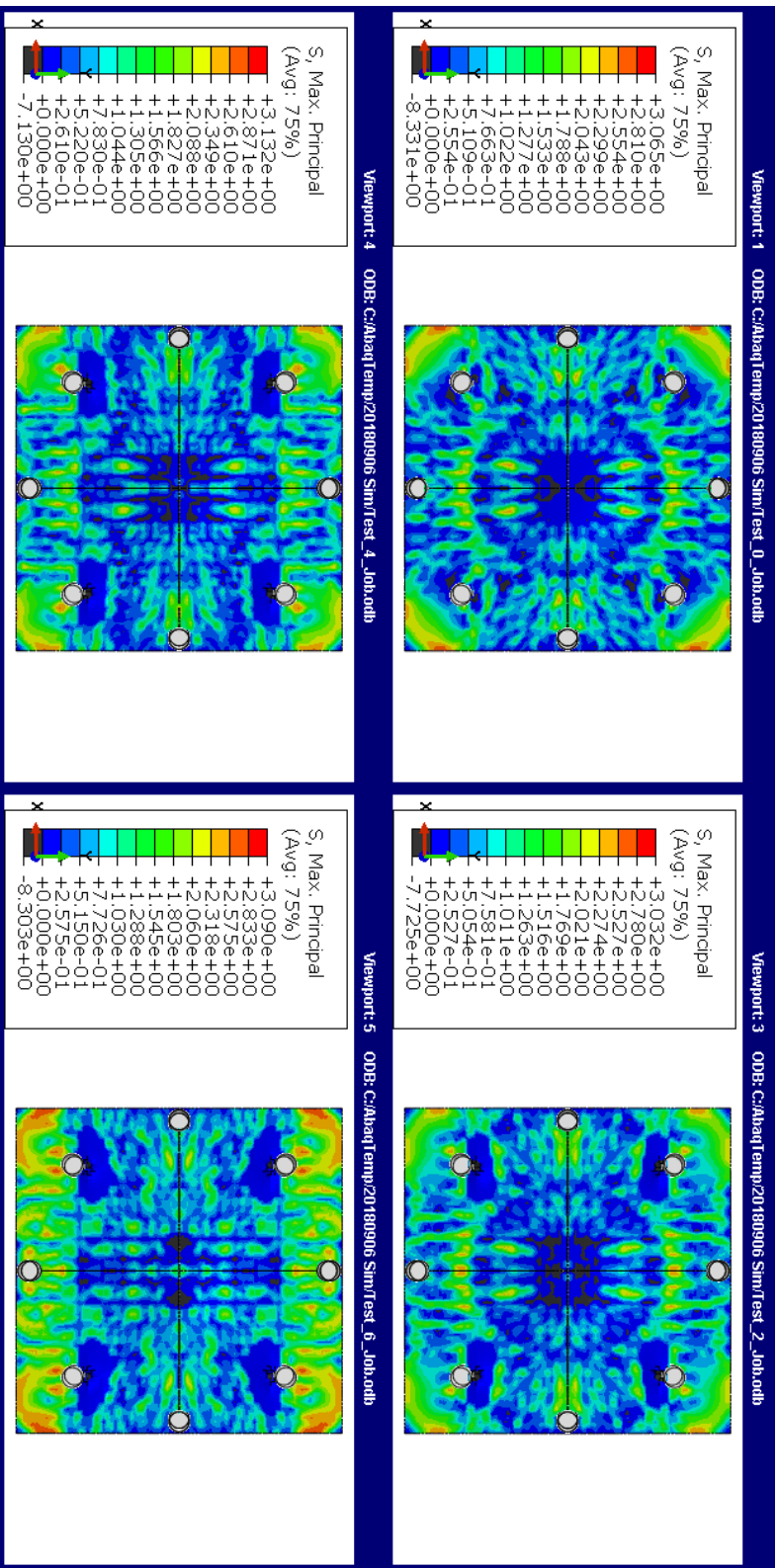


Figura D.7: Tensiones correspondientes a ($P = 139,5\text{ kN}$, $\delta = 20\text{ mm}$) ($0\%T_{lim}$), ($P = 140,33\text{ kN}$, $\delta = 20\text{ mm}$) ($50\%T_{lim}$), ($P = 138,63\text{ kN}$, $\delta = 20\text{ mm}$) ($100\%T_{lim}$) y ($P = 126,5\text{ kN}$, $\delta = 20\text{ mm}$) ($150\%T_{lim}$)